

修士論文

中性子輸送計算における不連続因子に関する研究

名古屋大学大学院
工学研究科博士課程 (前期課程)
マテリアル理工学専攻
量子エネルギー工学分野
量子エネルギーシステム工学講座
エネルギー量子制御工学グループ
坂本達哉
平成 26 年 2 月

目次

第 1 章 序論.....	5
1.1. 背景.....	5
1.2. 研究の目的.....	8
1.3. 本論文の構成.....	9
第 2 章 不連続因子(Discontinuity Factor, DF).....	10
2.1. 空間均質化.....	10
2.2. Generalized Equivalence Theory (GET).....	13
2.2.1. DF の理論.....	13
2.2.2. DF の計算手順.....	16
2.2.3. 単一集合体体系での DF の計算.....	17
2.3. GET 以外の均質化誤差低減手法.....	18
2.3.1. Equivalence theory (ET).....	18
2.3.2. Current discontinuity factor (CDF).....	20
2.3.3. Superhomogenization (SPH)法.....	21
2.4. 本章のまとめ.....	24
第 3 章 SP3 方程式における DF.....	27
3.1. SP3 方程式.....	28
3.1.1. P_N 方程式.....	28
3.1.2. SP3 方程式の理論.....	30
3.1.3. 角度中性子束と角度モーメントの関係.....	32
3.1.4. 角度モーメントと部分角度モーメントの関係.....	33
3.2. Individual Discontinuity Factor.....	38
3.2.1. 理論.....	38
3.2.2. 計算手順.....	40
3.2.3. 均質計算への適用方法.....	42
3.3. Unitary Discontinuity Factor.....	44
3.3.1. 理論.....	44
3.3.2. 計算手順.....	47
3.3.1. 均質計算への適用方法.....	50
3.4. 検証計算.....	50
3.4.1. 検証計算の内容と条件.....	50
3.4.2. 結果と考察.....	53
3.5. 本章のまとめ.....	62
第 4 章 微積分型輸送方程式における DF.....	65
4.1. Even-parity angular flux discontinuity factor (EPDF).....	66
4.1.1. 理論.....	66
4.1.2. 計算手順.....	70
4.2. Angular Flux Discontinuity Factor (AFDF).....	73

4.2.1. 理論	73
4.2.2. 計算手順	76
4.3. 均質化全断面積の角度依存性の取り扱い	78
4.4. 検証計算	79
4.4.1. 検証計算の内容と条件	79
4.4.2. 結果と考察	82
4.5. 本章のまとめ	90
第 5 章 結論	93
5.1. 結論	93
5.2. 今後の課題	93
参考文献	95
謝辞	97
Appendix A. 多項式解析的ノード法(有限差分形式)	98
A.1 ノード法	98
A.2 多項式解析的ノード法に基づく拡散計算	98
A.2.1 計算理論	98
A.2.1.1 導入	98
A.2.1.2 中性子源の展開	100
A.2.1.3 横方向漏れの近似	101
A.2.1.4 中性子束分布及び中性子流の計算	103
A.2.1.5 CMFD 計算	106
A.2.2 計算手順	107
A.3 多項式解析的ノード法に基づく SP3 計算	109
A.3.1 計算理論	109
A.3.1.1 導入	109
A.3.1.2 中性子源及び横方向漏れの 2 次多項式近似	110
A.3.1.3 中性子束分布の計算	110
A.3.1.4 中性子束と中性子流に対する CMFD 計算	110
A.3.1.5 2 次モーメントと 3 次モーメントに対する CMFD 計算(Flux level fixed up Coarse mesh finite difference (FF-CMFD) method)	110
A.3.2 計算手順	113
A.3.3 収束性についての検討	114
A.4 参考文献	118
Appendix B セル表面部分中性子流及び部分中性子束の計算	120
Appendix C EPDF と角度モーメントに対する DF の関係	124
公刊論文リスト	126

記号

\vec{r} : 位置
 E : エネルギー
 $\bar{\Omega}$: 立体角
 θ : 極角
 φ : 方位角
 μ : 方向余弦(3, 4 章)
 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$: x, y, z 方向の領域の幅
 $R(\bar{\Omega})$: 実球面調和関数
 $P(\mu)$: ルジャンドル多項式

ψ : 角度中性子束
 ϕ, ϕ_0 : 全中性子束(0 次の角度モーメント)
 J, J_1 : 中性子流(1 次の角度モーメント)
 ϕ_2 : SP3 方程式中の 2 次モーメント
 J_3 : SP3 方程式中の 3 次モーメント
 Φ : SP3 計算で使う量($\Phi = \phi_0 + 2\phi_2$)
 ϕ^e : even-parity 角度中性子束
 ϕ^o : odd-parity 角度中性子束
 J^\pm, J_1^\pm : 部分中性子流
 ϕ_0^\pm : 部分中性子束

Σ_R : 反応 R の反応断面積
 Σ_t : 全断面積
 Σ_s : 散乱断面積
 $\nu\Sigma_f$: 生成断面積
 χ : 核分裂スペクトル
 D, D_1 : 拡散係数

Q : 中性子源
 k : 増倍率、固有値
 k_{eff} : 実効増倍率
 f : DF, 不連続因子
 μ : SPH 因子(2 章)
 L : Region wise leakage

略語

SP_N 方程式: Simplified P_N 方程式

MOC: Method of characteristics, characteristics 法

ET: Equivalence theory

GET: Generalized equivalence theory

SPH 法: Superhomogenization 法

DF: Discontinuity factor, 不連続因子

DifDF: 拡散方程式における DF

AFDF: Angular flux discontinuity factor

EPDF: Even-parity angular flux discontinuity factor

Ref-DF: Reference DF (reference とする非均質計算の結果から計算された DF)

SA-DF: Single assembly DF (単一集合体体系での非均質計算の結果から計算された DF)

ADF: Assembly discontinuity factor, 集合体不連続因子

PDF: Pin cell discontinuity factor

CDF: Current discontinuity factor

SFXF: Homogenized XS weighted by scalar flux, 全中性子束重みの均質化全断面積

AFXF: Homogenized XS weighted by angular flux, 角度中性子束重みの均質化全断面積

EPXF: Homogenized XS weighted by even-parity angular flux, even-parity 角度中性子束重みの均質化全断面積

RMS: Root mean square

CR: Control rod

BA: Burnable absorber

添字

上付

het: 非均質体系

hom: 均質体系

x, y, z: *x, y, z* 方向

s: 領域表面

s(i, j): 領域(*i, j*)の表面

下付き

g: エネルギー群

x, y, z: *x, y, z* 方向

i, j: *x, y* 方向の領域

i + 1/2, j + 1/2: 領域 *i* と *i + 1*、*j* と *j + 1* の間の表面

第1章 序論

1.1. 背景

原子炉炉心の性能評価(炉心解析)のためには、炉心内の中性子束分布を適切に評価する必要がある。炉内の中性子の挙動は中性子輸送方程式(以降では輸送方程式と呼ぶ)に従うため、炉心解析ではコンピュータを用いて輸送方程式を数値的に解くことで中性子束分布の評価を行う。定常状態の輸送方程式は中性子の位置(3変数)、エネルギー(1変数)、運動方向(2変数)の合計6つの変数が密接に関連した形の方程式であり、原子炉炉心のような大型で複雑な体系に対して短時間で正確な解を求めることは困難である。そのため、輸送方程式を解く際には、様々な近似が用いられる。例えば、次の3つが挙げられる。

- (1) **中性子の飛行方向に関する近似**：中性子は様々な方向へ飛行しているため、中性子束は方向依存性をもつ(方向依存性を持った中性子束を角度中性子束と呼ぶ)。角度中性子束の角度依存性を近似することで、輸送方程式を単純にした方程式(拡散方程式、 P_N 方程式、 SP_N 方程式など)を導くことができる。拡散方程式は最も多く近似を含むが、式形が簡単であるため解析によく用いられている。
- (2) **エネルギー依存性に関する近似**：中性子輸送方程式に含まれる定数である核反応断面積は中性子のエネルギーに対して複雑な依存性を持つ。この依存性を厳密に取り扱うことは難しいため、エネルギーを複数の領域に区切り、その領域内で断面積が一定であるとして離散的に取り扱う。
- (3) **原子炉炉心の幾何形状に関する近似**

本研究では、上述した近似のうち、(3)原子炉炉心の幾何形状に関する近似の1つである「空間均質化」に着目する。

空間均質化とは、ある領域内の幾何形状を均質なものとして取り扱い、領域内で反応断面積を一定とする操作である[1,2]。空間均質化は一般的に燃料集合体単位もしくは燃料ピンセル単位で行われる。空間均質化を行うことで、近代ノード法等の効率的な計算手法を解析に適用できるようになり、炉心計算にかかる時間を大幅に低減することができる。しかし、空間均質化に伴って均質化誤差が発生し、炉心解析の精度に大きな影響を与える。

空間均質化の一番の目標は、非均質体系における計算(以降では非均質計算)結果の領域平均の値(領域平均反応率など)を、均質体系における計算(以降では均質計算)で再現することである。この非均質計算と均質計算の結果の差異のことを均質化誤差と呼ぶ。均質化誤差は次の2つの要因により発生する。

- (1) **空間均質化を行う体系と解析を行う体系の違いによる誤差**：空間均質化では、均質化を行う領域内の反応断面積を平均化し領域内で一定の値とする。ただし、単に体積平均するのではなく、領域平均反応率を再現するために、非均質計算で得られた中性子束を重みとして平均化する。ここで問題となるのは、均質化のためには非均質計算で得られた中性子束が必要であるが、この中性子束はわかり得ないという点である(非均質計算の結果があるのであれば均質化を行う必要が無い)。そのため、実際には、Figure 1.1.1 に示す炉心体系での計算を行う場合、次の手順を踏むこととなる。
 - (i) 炉心を構成する燃料集合体 1 つのみで構成される体系(単一集合体体系)で非均質計算を行い、中性子束を計算する。

(ii) (i)で得られた中性子束を用いて空間均質化を行う。

(iii) (ii)で得られた均質化断面積を用いて炉心体系の計算を行う(均質計算)。

本来であれば、炉心体系の非均質計算で得られた中性子束を用いて均質化を行うべきであるが、実際には単一集合体体系で得られた中性子束を用いて均質化が行われる。この近似により均質化誤差が生じる。

- (2) **中性子漏れ量が保存されないことによる誤差:**(1)で炉心体系ではなく単一集合体体系の計算で得られる中性子束を用いて均質化を行うために誤差が発生すると説明した。しかし、仮に炉心体系の計算で得られる中性子束を用いて均質化を行ったとしても誤差は発生する。これは、中性子束重みの均質化断面積で考慮しているのが領域平均反応率の保存のみであるために、領域表面からの中性子漏れ量(中性子の流入と流出の収支)を保存できないことが原因である。中性子漏れ量が保存されないことにより、結局領域平均反応率も保存されず均質化誤差が生じる。

本研究では上記の要因(2)による均質化誤差に着目する。以降の均質化誤差は要因(2)の均質化誤差を示している。

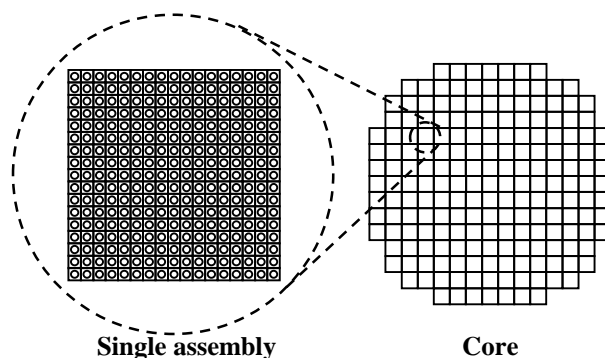


Figure 1.1.1 炉心体系と単一燃料集合体体系

(2)の均質化誤差を取り除く、即ち中性子漏れ量を保存するためには、均質化断面積以外に新たに均質化パラメータを導入する必要がある。この均質化パラメータの与え方の違いにより均質化理論は generalized equivalence theory (GET)[1]、equivalence theory (ET)[1]、SPH 法[3,4]などに分けることができる。本研究では、現在最も広く用いられている GET に着目する。

GET は ET を一般化した理論である。GET では、不連続因子(discontinuity factor, DF)を用いることで均質化誤差を低減する。DF は拡散方程式(中性子輸送方程式を近似した方程式)に基づく近代ノード法において広く用いられており、炉心解析の精度向上に大きく寄与している。

拡散方程式における GET では、DF を用いて均質化領域表面で中性子束を不連続にする。これによって、均質化領域表面での中性子流(中性子の流入と流出の差に関する量)を保存することで中性子漏れ量を保存し、均質化誤差を取り除く。一例として、拡散方程式における DF について以下で簡単に説明する。DF は方程式の解の自由度(微分方程式を解くために必要な拘束条件の数)と関連している。拡散方程式は空間に対する 2 階微分方程式であるため、方程式を解くために 1 次元空間であれば 2 つ、2 次元空間であれば 4 つ、3 次元空間であれば 6 つの拘束条件を与える必要がある。通常、拡散方程式を解く際には物理的な観点から、各領域(xyz 空間の立方体)表面に対して(1)中性子流が連続、(2)中性子束が連続、という 2 つの拘束条件を与える。一方、GET に基づく均質計算では(1)中性子流が連続、(2)中性子束が不連続、という 2 つの拘束条件を与える。ただし、拘束条件(2)の中性子束の不連続さは DF を用いて表され、DF は均質体系の中性子流が非均質体系の中性子流と等しくなるように決

められる。中性子流が保存されるように、DF を用いて中性子束の不連続性を調整するというようなイメージである。DF は各表面それぞれに対して与えられ、特別な場合を除いて各表面で異なる値となる。

中性子束が領域表面で不連続であることは物理的な観点からすると問題があるように感じるかもしれない。しかし、中性子束がある領域内の中性子の数に関連する量であることを踏まえると、中性子束に関して、均質化された領域内で物理的な意味を持つのは領域平均の値のみである。そのため、領域表面で不連続であっても物理的に問題ではない。

GET の基となった ET についても説明しておく。ET は上記の GET と同様に DF(ET において DF は heterogeneity factor と呼ばれる)を決める。ただし、ET では、例えば 2 次元体系であれば Figure 1.1.2 に示すように x 方向、y 方向それぞれの 2 つの表面に対する DF が等しくなるように拡散係数を調整する。そのため、拡散係数は x 方向と y 方向で異なる値を持つ。ET はこのように、各方向の 2 つの表面に対する DF が等しく、拡散係数が方向依存性を持つ。なお、GET では拡散係数の値は任意である。

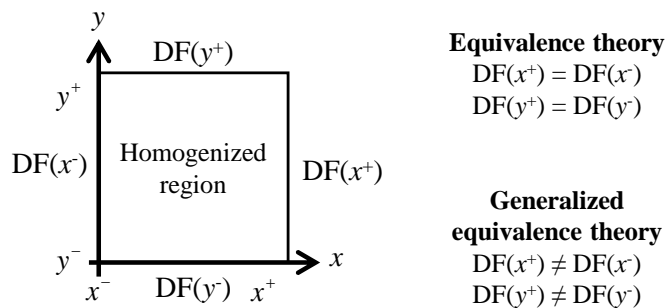


Figure 1.1.2 ET と GET における DF(2 次元体系)

次に、拡散方程式よりも高次の方程式(輸送方程式、 P_N 方程式、 SP_N 方程式)における DF について簡単に説明する。上記のように、DF は中性子漏れ量が保存されるように決められるが、その定義の仕方は DF を適用する方程式の解の自由度(微分方程式を解くために必要な拘束条件の数)に依存する。例えば、上記のように拡散方程式の自由度では領域表面中性子流のみ保存できるが、高次の方程式は拡散方程式より解の自由度が大きいため、より多くの量を保存できる。保存する量の任意性が増えることから、高次の方程式では DF の定義の仕方を複数種類考えることができる。複数種類の定義を考えることができるということは即ち、どのように定義した DF が、均質化誤差をよく低減できるか、実用的(計算に必要なメモリ量など)であるか等についてよく検討する必要があるということを示唆している。

近年、計算機性能の向上や非均質性の強い炉心の解析の需要のために、均質計算へ拡散方程式よりも高次の方程式(輸送方程式、 P_N 方程式、 SP_N 方程式)を用いることが期待されている。高次の方程式においても、均質化誤差を低減するために DF 等の均質化誤差低減パラメータを用いることは必須である。高次の方程式に対する DF は過去にいくつか提案されているが、近年活発に研究され始めた段階である[5-11]。均質計算への適用が特に期待される SP_3 方程式(3 次の SP_N 方程式)と微積分型輸送方程式(微分と積分を含む形式の輸送方程式。 S_N 法や MOC の基礎式)における DF の課題点を以下にまとめる。

・ **SP3 方程式における DF**

- SP3 方程式の解の自由度を考えた場合、領域表面において、ある 2 つの量を保存するように

DF を定義することができる。保存する量の 1 つが中性子流であるとして、もう 1 つの量として何を保存するように DF を定義すれば、より性能の良い(均質化誤差低減量が大きいなど)DF となるのかについて、理論的に明らかになっていない。

- 拡散方程式や SP3 方程式は中性子束や中性子流などの角度モーメント(角度中性子束の角度依存性を実球面調和関数で展開した時の展開係数)の微分方程式である。そのため、DF の定義の仕方によっては、DF を計算するために非均質計算の結果から求めた角度モーメントが必要となる場合がある。しかし、SP3 方程式が経験的に導出された方程式であるため、SP3 方程式中の角度モーメントを非均質計算の結果から厳密に計算する方法は、理論的に解明されていない。

・ 微積分型輸送方程式における DF

- 上記のように拡散方程式や SP_N 方程式は中性子束など角度モーメントの微分方程式であるため、これらの方程式における DF は角度モーメントの不連続さとして定義することができる。しかし、微積分型輸送方程式は角度中性子束に対する微分方程式であるため、角度中性子束の不連続さとして DF を定義しなくてはならない。そのため、拡散方程式等の DF と同じように考えることができない。微積分型輸送方程式における DF はこのような難しさをもっている。
- SP3 方程式における DF と同様に、どのように定義した DF が性質の良い DF となるかは明らかになっていない。

これらの課題を解決し、それぞれの方程式に対する DF の理論を確立することが求められている。

1.2. 研究の目的

1.1 節で述べたように、均質計算への適用が期待される SP3 方程式や微積分型輸送方程式においても DF 等の均質化誤差低減パラメータを用いることが必須である。しかし、これらの方程式における DF はまだ最近活発に研究がなされ始めた段階であり、DF をどのように定義することで性質の良い DF となるかは明らかになっていない。

そこで、本論文では SP3 方程式と微積分型輸送方程式それぞれに対する新しい DF を提案し、その性質(均質化誤差低減量やその他の特徴)を検証することを目的とする。

具体的には、SP3 方程式に対する DF として、次の 2 つを提案する。

- ・ **Individual DF:** DF は全中性子束と 2 次モーメントに対して適用され、領域表面中性子流と 3 次モーメントが保存されるように決められる。非均質計算での 2 次モーメントと 3 次モーメントはそれぞれ非均質計算の部分中性子束及び部分中性子流から推定される。
- ・ **Unitary DF:** DF は全中性子束と 2 次モーメントに対して適用される。全中性子束と 2 次モーメントに対する DF の値が等しく、かつ領域表面中性子流が保存されるように DF は決められる。

さらに、微積分型輸送方程式に対する DF として **angular flux discontinuity factor (AFDF)** を提案する。AFDF は角度中性子束に対して適用され、各角度の領域内中性子漏れ量が保存されるように決定される。

1.3. 本論文の構成

本論文の構成について説明する。本章では背景及び目的について説明した。第2章では空間均質化、拡散方程式におけるDFについて説明する。第3章ではSP3方程式におけるDFの理論の提案及び検証を行う。第4章では微積分型輸送方程式におけるDFとしてEPDFの説明を行う。また、AFDFの理論の提案及び検証を行う。第5章に本論文のまとめを記す。

第2章 不連続因子(Discontinuity Factor, DF)

本章では、本論文のテーマである不連続因子(Discontinuity factor, DF)について説明する[1,2]。DFは均質化パラメータの一つであり、空間均質化やエネルギー群縮約による誤差を補正する働きがある。また、DFを用いることで、高次の方程式(輸送方程式や P_N 方程式)の輸送効果を低次の方程式(拡散方程式やSP3方程式など)に取り込むこともできる。

本章ではDFの基礎として拡散方程式のDF(DifDF)を取り扱う。DifDFは均質体系で領域表面中性子流が保存される(非均質体系の領域表面中性子流が再現される)ように定義される。DifDFは領域表面全中性子束の連続性の式に対して適用され、全中性子束を領域表面で不連続とする。

referenceの非均質計算(全炉心計算など)の結果から求められたDF(Ref-DF)を用いた均質計算は、非均質計算の結果(増倍率、領域平均反応率)を完全に再現する。しかし、referenceの結果が分かっているならば均質計算を行う意味が無いため、Ref-DFは実用的でない。そのため、実際の計算ではRef-DFの代わりに、完全反射境界条件を仮定した単一集合体体系で評価されたSingle assembly discontinuity factor(SA-DF)が用いられる。SA-DFは集合体均質化の場合にはAssembly discontinuity factor(ADF)、pin-by-pin均質化の場合にはPin cell discontinuity factor(PDF)と呼ばれる。ADFは拡散近代ノード法で広く用いられており、炉心解析精度の向上に貢献している[1]。

2.1節では空間均質化について基礎的な理論について説明する。2.2節では拡散方程式に対するgeneralized equivalence theory(GET)について説明する。2.3節ではGET以外の均質化誤差低減手法についても説明する。最後に2.4節に本章のまとめを記す。

2.1. 空間均質化

本節では空間均質化の基礎的な理論について説明する。現在の炉心解析では、計算コストを低減するために空間均質化が行われる。空間均質化とはFigure 2.1.1に示すように均質化領域内の幾何形状を均質なものとし、領域内で反応断面積を一定とする操作である。

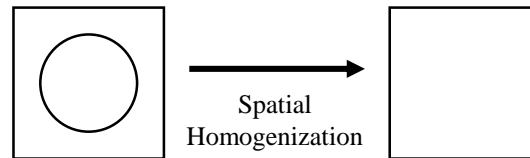


Figure 2.1.1 ピンセルの空間均質化

空間均質化の目標は、均質体系での計算が非均質体系での計算結果(増倍率、領域平均反応率)を再現することである。この目標が不連続因子(DF)の導入の要であるので、これを念頭に置いて読み進めてほしい。なお、反応率とは断面積と全中性子束の積 $\Sigma_R \phi$ であり、炉内の核分裂による発熱分布の解析の際に必要となる。以下では空間均質化の数学的説明を行う。

さて、簡単のためFigure 2.1.2に示す直方体領域*i*内で均質化することを考える。等方散乱を仮定した輸送方程式を全立体角で積分することで、非均質体系において全中性子束と中性子流に次式の関係が成り立つことがわかる。

$$\nabla \cdot \vec{J}_g^{het}(\vec{r}) + \Sigma_{t,g}(\vec{r})\phi_g^{het}(\vec{r}) = Q_g^{het}(\vec{r}) \quad (2.1.1)$$

$$Q_g^{het}(\vec{r}) \equiv \sum_{g'} \bar{\Sigma}_{s,g' \rightarrow g}(\vec{r}) \phi_{g'}^{het}(\vec{r}) + \frac{\chi_g(\vec{r})}{k_{eff}^{het}} \sum_{g'} v \bar{\Sigma}_{f,g'}(\vec{r}) \phi_{g'}^{het}(\vec{r}) \quad (2.1.2)$$

ただし、

$$\vec{J}_g(\vec{r}) \equiv \int_{4\pi} \vec{\Omega} \psi_g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = (J_g^x(\vec{r}), J_g^y(\vec{r}), J_g^z(\vec{r})) \quad (2.1.3)$$

$$\phi_g(\vec{r}) \equiv \int_{4\pi} \psi_g(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad (2.1.4)$$

であり、 J^c は c 方向の中性子流である。また、添字 *het* は非均質体系での値であることを示しており、 g はエネルギー群を表している。なお、(2.1.1)式では拡散近似等の角度中性子束に関する近似を用いていないことに注意されたい。

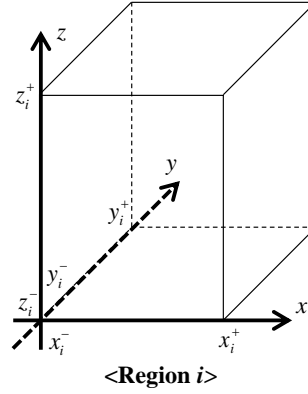


Figure 2.1.2 均質化領域 i

(2.1.1)式を領域 i 内で体積積分することで次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\bar{J}_g^{het,x}(x_i^+) - \bar{J}_g^{het,x}(x_i^-)}{\Delta x_i} + \frac{\bar{J}_g^{het,y}(y_i^+) - \bar{J}_g^{het,y}(y_i^-)}{\Delta y_i} \\ + \frac{\bar{J}_g^{het,z}(z_i^+) - \bar{J}_g^{het,z}(z_i^-)}{\Delta z_i} + \bar{\Sigma}_{t,i,g} \bar{\phi}_{i,g}^{het} = \bar{Q}_{i,g}^{het} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

$$\bar{Q}_{i,g}^{het} \equiv \sum_{g'} \bar{\Sigma}_{s,i,g' \rightarrow g} \bar{\phi}_{i,g'}^{het} + \frac{\bar{\chi}_{i,g}}{k_{eff}^{het}} \sum_{g'} v \bar{\Sigma}_{f,i,g'} \bar{\phi}_{i,g'}^{het} \quad (2.1.6)$$

ただし、

$$\bar{J}_g^c(r_c) \equiv \frac{\int_{surface\ r_c} J_g^c(\vec{r}) dS}{\int_{surface\ r_c} dS} \quad (2.1.7)$$

$$\bar{\Sigma}_{R,i,g} \equiv \frac{\int_{V_i} \Sigma_{R,g}(\vec{r}) \phi_g^{het}(\vec{r}) dV}{\int_{V_i} \phi_g^{het}(\vec{r}) dV} \quad (2.1.8)$$

$$\bar{\phi}_{i,g} \equiv \frac{\int_{V_i} \phi_g(\vec{r}) dV}{\int_{V_i} dV} \quad (2.1.9)$$

$$\bar{Q}_{i,g} \equiv \frac{\int_{V_i} Q_g(\vec{r}) dV}{\int_{V_i} dV} \quad (2.1.10)$$

$$\bar{\chi}_{i,g} \equiv \frac{\int_{V_i} \chi_g(\vec{r}) \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'}(\vec{r}) \phi_{g'}^{het}(\vec{r}) dV}{\int_{V_i} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'}(\vec{r}) \phi_{g'}^{het}(\vec{r}) dV} \quad (2.1.11)$$

であり、 $\bar{J}_g^c(r_c)$ は位置 r_c における c 方向の面平均正味中性子流(例えば $\bar{J}_g^{het,x}(x_i^+)$ は位置 $x = x_i^+$ における x 方向の面平均正味中性子流($y_i^- \leq y \leq y_i^+, z_i^- \leq z \leq z_i^+$))である。また、 $\bar{\Sigma}_{R,i,g}$ は反応 R の領域平均断面積、即ちこの領域の均質化断面積であり、領域内で全中性子束を重みとして平均化されている。注意してほしいのは、均質化断面積が単に断面積を体積平均したものではないということである。全中性子束重みで平均化することで、次式に示すように均質化断面積と非均質体系の領域平均全中性子束の積が領域平均反応率を再現できる。

$$\bar{\Sigma}_{R,i,g} \bar{\phi}_{i,g}^{het} = \frac{\int_{V_i} \Sigma_{R,g}(\vec{r}) \phi_g^{het}(\vec{r}) dV}{\int_{V_i} dV} \quad (2.1.12)$$

上記の手順で得られた均質化断面積を用いて、均質体系での中性子流と全中性子束の関係式は次式で表される。

$$\nabla \cdot \bar{J}_g^{hom}(\vec{r}) + \bar{\Sigma}_{t,i,g} \phi_g^{hom}(\vec{r}) = Q_g^{hom}(\vec{r}) \quad (2.1.13)$$

非均質体系での関係式(2.1.1)式と異なるのは、領域 i 内で断面積の位置依存性がなくなっている、つまり領域 i 内均質な物質であるとして取り扱われている点である。(2.1.13)式を領域 i 内で体積分することで次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\bar{J}_g^{hom,x}(x_i^+) - \bar{J}_g^{hom,x}(x_i^-)}{\Delta x_i} + \frac{\bar{J}_g^{hom,y}(y_i^+) - \bar{J}_g^{hom,y}(y_i^-)}{\Delta y_i} \\ + \frac{\bar{J}_g^{hom,z}(z_i^+) - \bar{J}_g^{hom,z}(z_i^-)}{\Delta z_i} + \bar{\Sigma}_{t,i,g} \bar{\phi}_{i,g}^{hom} = \bar{Q}_{i,g}^{hom} \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

(2.1.5)式と(2.1.14)式を見比べるとわかるように、非均質計算の結果を再現するためには、中性子漏れ量((2.1.5)式と(2.1.14)式の第1-3項)が保存されなければならない。しかし、全中性子束重み均質化断面積を用いるだけでは中性子漏れ量を保存できず、結局次式に示すように非均質計算の領域平均反応率を再現することはできない。

$$\bar{\Sigma}_{R,i,g} \bar{\phi}_{i,g}^{hom} \neq \bar{\Sigma}_{R,i,g} \bar{\phi}_{i,g}^{het} = \frac{\int_{V_i} \Sigma_{R,g}(\vec{r}) \phi_g^{het}(\vec{r}) dV}{\int_{V_i} dV} \quad (2.1.15)$$

そのため、空間均質化では均質化断面積に加えて、中性子漏れ量を保存するための均質化パラメータ(DF、SPH因子など)が用いられる[3,4]。

2.2. Generalized Equivalence Theory (GET)

前節で述べたように、均質体系で非均質体系の計算結果を再現するためには、全中性子束重みの均質化断面積に加えて、中性子漏れ量を保存するための均質化パラメータを導入することが必要となる。この均質化パラメータに関する理論の1つが Generalized Equivalence Theory (GET)である[1]。GETでは中性子漏れ量を保存するために、不連続因子(DF)という均質化パラメータを用いて均質化領域表面で中性子束を不連続にする。本節では GET の概要として、拡散方程式における DF (DifDF)の理論とその計算手順、単一集合体系での DF の評価について説明する。

2.2.1. DF の理論

簡単のため、Figure 2.2.1.1 に示す 1 次元平板体系で拡散方程式における不連続因子(DifDF)を導出する。

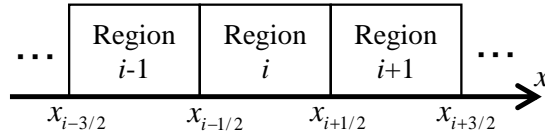


Figure 2.2.1.1 1次元平板体系

Figure 2.2.1.1 の領域 i 内を均質化することを考える。2.1.1 項と同様にして、非均質体系における中性子流と全中性子束の関係式は(2.2.1.1)式、それを領域 i 内で体積積分した式は(2.2.1.2)式で表される。

$$\nabla \cdot J_g^{het}(x) + \Sigma_{t,g}(x) \phi_g^{het}(x) = Q_g^{het}(x) \quad (2.2.1.1)$$

$$\frac{J_{i+1/2,g}^{het} - J_{i-1/2,g}^{het}}{\Delta x_i} + \bar{\Sigma}_{t,i,g} \bar{\phi}_{i,g}^{het} = \bar{Q}_{i,g}^{het} \quad (2.2.1.2)$$

なお、(2.2.1.1)式及び(2.2.1.2)式は拡散方程式であることを仮定していないことに注意して欲しい。一般的に非均質計算には中性子の角度依存性の取り扱いが高次の方程式(輸送方程式、 P_N 方程式など)が用いられる。

均質体系の拡散方程式は均質化断面積を用いて次式で表される。

$$\frac{d}{dx} J_g^{hom}(x) + \bar{\Sigma}_{t,i,g} \phi_g^{hom}(x) = Q_g^{hom}(x) \quad (2.2.1.3)$$

$$J_g^{hom}(x) = -\bar{D}_{i,g} \frac{d\phi_g^{hom}}{dx} \quad (2.2.1.4)$$

(2.2.1.4)式を(2.2.1.3)式に代入すると分かるように、1次元拡散方程式は2階の微分方程式である。(2.2.1.3)式を領域 i 内で積分することで次式を得る。

$$\frac{J_{i+1/2,g}^{hom} - J_{i-1/2,g}^{hom}}{\Delta x_i} + \bar{\Sigma}_{t,i,g} \bar{\phi}_{i,g}^{hom} = \bar{Q}_{i,g}^{hom} \quad (2.2.1.5)$$

2.1 節で述べたように、全中性子束重み均質化断面積を用いるだけでは中性子漏れ量の項((2.2.1.2)式及び(2.2.1.5)式の第1項)が保存されず、結局、非均質計算の結果(増倍率、領域平均反応率)を均質計算で再現することができない。(2.2.1.2)式と(2.2.1.5)式を見比べると、次式に示すように領域表面中性子流が保存されれば中性子漏れ量(ある領域表面での中性子流の総和)が保存され、均質計算で非均質

計算の結果を再現できることがわかる。

$$J_{i+1/2,g}^{hom} = J_{i+1/2,g}^{het}, \quad J_{i-1/2,g}^{hom} = J_{i-1/2,g}^{het} \quad (2.2.1.6)$$

(2.2.1.6)式を満たす均質拡散計算について考える。上記のように 1 次元拡散方程式は 2 階の微分方程式であるため、これを解くためには 2 つの拘束条件を与える必要がある。そのため、Figure 2.2.1.2 (b) に示すように均質化領域 i 内の均質拡散方程式(2.2.1.3)式に拘束条件(2.2.1.6)式を与えて解くことで、非均質計算の結果を再現する領域 i 内の中性子束の空間分布を求めることができる。この計算は各均質化領域で独立に行うため、全中性子束 ϕ^{hom} は領域表面で不連続となる。

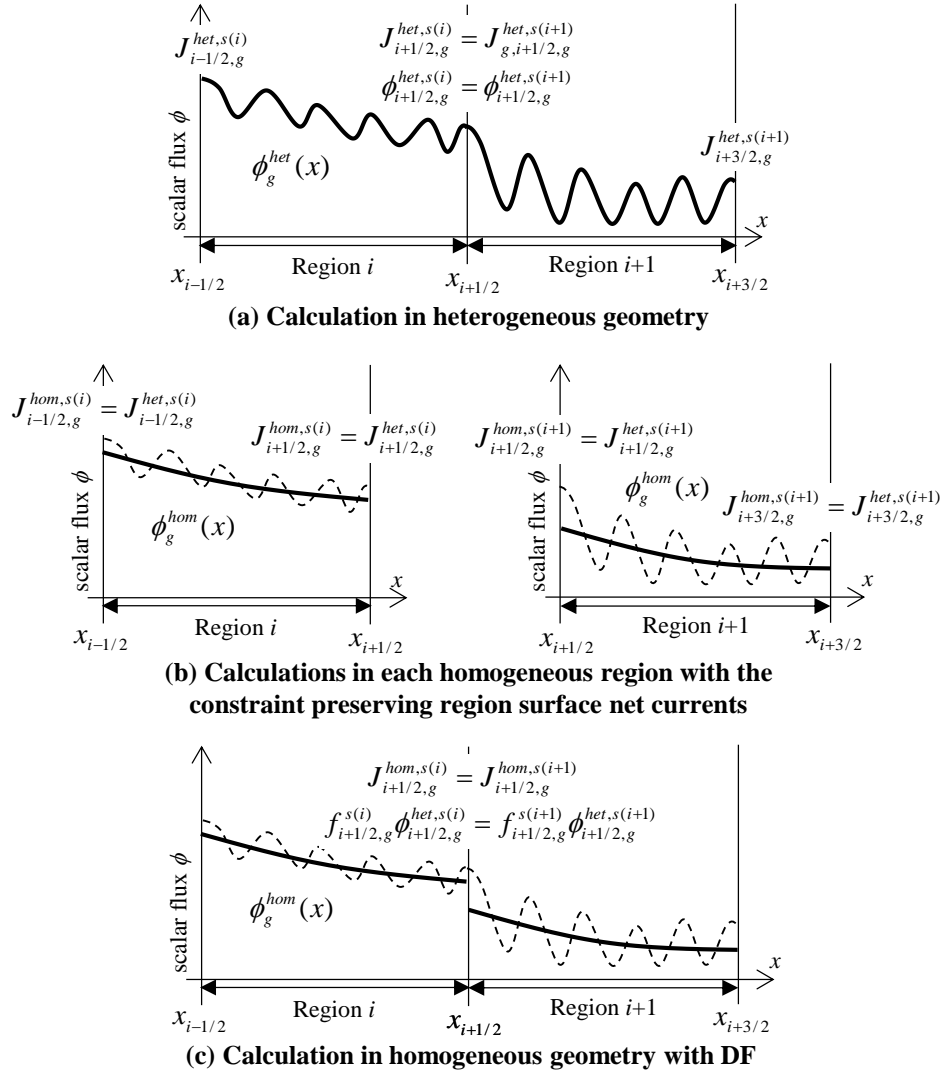


Figure 2.2.1.2 非均質体系と均質体系での中性子束の空間分布

ここで、この計算と非均質計算で得られた領域表面全中性子束を用いて DifDF を次式で定義する。

$$f_{i\pm 1/2,g}^{s(i)} \equiv \frac{\phi_{i\pm 1/2,g}^{het,s(i)}}{\phi_{i\pm 1/2,g}^{hom,s(i)}} \quad (2.2.1.7)$$

ただし、上付き添字 $s(i)$ は領域 i の表面であることを示している。非均質計算の結果を再現するときの領域表面全中性子束の関係は DifDF を用いて次式で表される。

$$\frac{\phi_{i+1/2,g}^{hom,s(i+1)}}{\phi_{i+1/2,g}^{hom,s(i)}} = \frac{\phi_{i\pm 1/2,g}^{het,s(i)} / \phi_{i+1/2,g}^{hom,s(i)}}{\phi_{i\pm 1/2,g}^{het,s(i)} / \phi_{i+1/2,g}^{hom,s(i+1)}} = \frac{f_{i+1/2,g}^{s(i)}}{f_{i+1/2,g}^{s(i+1)}} \quad (2.2.1.8)$$

ここまでは DifDF の計算方法の概要について説明した。ここからは、DifDF を用いて均質体系の計算を行うことを考える。通常、拡散計算を行う際には領域表面で全中性子束と中性子流が連続であるという次の連続性に関する条件を与える。

$$\phi_{i+1/2,g}^{s(i)} = \phi_{i+1/2,g}^{s(i+1)} \quad (2.2.1.9)$$

$$J_{i+1/2,g}^{s(i)} = J_{i+1/2,g}^{s(i+1)} \quad (2.2.1.10)$$

DifDF を用いた均質計算では、Figure 2.2.1.2 (c)に示すように中性子流については(2.2.1.10)式、全中性子束については(2.2.1.9)式の代わりに次の条件を与える。

$$f_{i+1/2,g}^{s(i)} \phi_{i+1/2,g}^{s(i)} = f_{i+1/2,g}^{s(i+1)} \phi_{i+1/2,g}^{s(i+1)} \quad (2.2.1.11)$$

(2.2.1.11)式は、非均質体系で領域表面全中性子束が連続であるということより導かれる。(2.2.1.11)式を与えることで、非均質計算の結果を再現するときの領域表面全中性子束の関係(2.2.1.8)式を満たすことができる。つまり、非均質計算の結果を再現することができる。

以上が DF の理論である。上記以外に DF について特に記すべきことを以下に挙げる。

- 以上では 1 次元体系での DF の理論について説明したが、2 次元及び 3 次元体系に対しても同様に考えることができる。なお、1 次元体系では 2 つの表面それぞれ中性子流を保存することを考えたが、2 次元体系では 4 つ、3 次元体系では 6 つの表面それぞれで中性子流を保存させる必要がある。
- 均質化拡散係数 \bar{D} が 0 以外のどのような値でも DF を用いることで中性子流を保存することができる。
- 例えば非均質輸送方程式を解いて得られた結果を均質拡散計算で再現できるように、DifDF は高次の方程式(輸送方程式や P_N 方程式)の輸送効果を拡散方程式に取り込む効果も持っている。より一般的に言えば、DF は高次の方程式(輸送方程式や P_N 方程式)の輸送効果を低次の方程式(拡散方程式や SP3 方程式など)に取り込むことができる。
- DF はエネルギー群縮約による誤差も排除することができる。エネルギー群縮約でも全中性子束重み縮約断面積では中性子漏れ量が保存されないという問題が発生する。そのため、空間均質化と同様に領域表面中性子流を保存することを考えることで DF を定義することができる。
- 拡散方程式に対する DF についてのみ説明したが、拡散方程式より高次の方程式(輸送方程式、SP3 方程式など)に対する DF もいくつか提案されている[5-11]。しかし、拡散方程式における DF ほど広く使われてはいない。また、高次の方程式には束縛条件をより多く与えることができるため、同じ方程式に対する DF でも計算方法が複数あり、それぞれの方法で保存できる量が異なる。例えば、本論文第 3 章で述べるように SP3 方程式では、中性子流のみを保存するように DF を定義する方法、中性子流に加えて高次の奇数次モーメントも保存するように DF を定義する方法がある。

2.2.2. DF の計算手順

本節では DifDF の計算手順について説明する。

1次元有限差分法 1メッシュ

DifDF の計算手順のイメージをつかむため、次に示す簡単な条件での DifDF の計算について説明する。

- 1次元平板体系、多群、固有値問題(2.2.1 節と同じ問題設定)。
- 均質拡散計算を有限差分法で行う[12]。
- 1つの均質化領域を 1メッシュとする。

領域 i の領域表面に対する DifDF を計算することを考える。有限差分法を用いるため、中性子流、領域表面全中性子束及び領域平均全中性子束の間に次の関係が成り立つ。

$$J_{i\pm 1/2,g}^{hom,s(i)} = -\bar{D}_{i,g} \left(\pm \phi_{i\pm 1/2,g}^{hom,s(i)} \mp \bar{\phi}_{i,g}^{hom} \right) \quad (2.2.2.1)$$

ここで、領域表面中性子流が保存されるという拘束条件(2.2.1.6)式を与えられた均質計算を考える。2.2.1 節で述べたように、このとき非均質計算の領域平均反応率が再現される。そのため、領域平均全中性子束も再現される。よって、(2.2.2.1)式は次式のように表される。

$$J_{i\pm 1/2,g}^{het,s(i)} = -\bar{D}_{i,g} \left(\pm \phi_{i\pm 1/2,g}^{hom,s(i)} \mp \bar{\phi}_{i,g}^{het} \right) \quad (2.2.2.2)$$

(2.2.2.2)式より、均質計算の領域表面全中性子束は次式で求められる。

$$\phi_{i\pm 1/2,g}^{hom,s(i)} = \bar{\phi}_{i,g}^{het} \mp \frac{J_{i\pm 1/2,g}^{het,s(i)}}{\bar{D}_{i,g}} \quad (2.2.2.3)$$

(2.2.2.3)式で得られた領域表面全中性子束 $\phi_{i\pm 1/2,g}^{hom,s(i)}$ と非均質計算の領域表面全中性子束 $\phi_{i\pm 1/2,g}^{het,s(i)}$ を用いて、各領域表面で(2.2.1.7)式より DifDF を計算する

なお、DifDF を用いた有限差分法では、(2.2.1.11)式より領域平均全中性子束を用いて中性子流が次式で表される。

$$J_{i+1/2,g}^{hom,s(i)} = J_{i+1/2,g}^{hom,s(i+1)} = -\frac{2 \left(f_{i+1/2,g}^{s(i+1)} \bar{\phi}_{i+1,g}^{hom} - f_{i+1/2,g}^{s(i)} \bar{\phi}_{i,g}^{hom} \right)}{f_{i+1/2,g}^{s(i+1)} \Delta x_{i+1} / \bar{D}_{i+1,g} + f_{i+1/2,g}^{s(i)} \Delta x_i / \bar{D}_{i,g}} \quad (2.2.2.4)$$

ノード法

上記の有限差分 1メッシュの場合は簡単な条件設定であったため、領域表面中性子流が保存されるという束縛条件を与えられた均質拡散計算を解析的に解き、領域表面全中性子束を解析的に求めることができた。しかし、実際の均質拡散計算にはノード法が用いられることが多く、ノード法の中でも中性子源を展開する手法の場合には解析的に解くことが難しい。そのため、反復法を用いてこの均質拡散計算を数値的に解き、領域表面全中性子束を計算する。以下にこの反復計算の手順を示す。なお、この反復計算は本論文 3.4 節での DifDF の計算に用いている。

- (1) 領域表面全中性子束を計算するある均質化領域において、中性子源と中性子束の空間分布が未知であるため、これらの空間分布に初期値を与える。
- (2) 非均質体系の領域表面中性子流を束縛条件とした 1ノード問題を解く。

- (3) Step (2)の結果より、領域表面全中性子束及び全中性子束の空間分布を計算する。さらに、得られた全中性子束の空間分布から中性子源の空間分布を計算する。なお、全中性子束の空間分布を計算する際に、領域平均全中性子束が非均質計算のそれと一致するように規格化すると計算がより安定となる。
- (4) Step (2)-(3)を領域表面全中性子束が収束するまで繰り返す。

DifDF の全体的な計算手順

DifDF の全体的な計算手順を以下に示す。

- (1) 非均質計算を行う。
- (2) Step (1)の結果より均質化断面積、領域平均全中性子束、領域表面全中性子束及び均質領域表面中性子流を計算する。
- (3) Step (2)で得られた非均質計算の領域表面中性子流、領域平均全中性子束を用いて、上記の領域表面中性子流が保存されるという束縛条件を与えた均質拡散計算を行う。
- (4) Step (3)の結果より、均質計算の均質化領域表面全中性子束を計算する。
- (5) Step (2)と(4)で得た均質化領域表面全中性子束の比をとることで DifDF を計算する。

以上が DifDF の計算手順である。

2.2.3. 単一集合体体系での DF の計算

本項では DF が実際にはどのような体系で計算されているか説明する。今、Figure 2.2.3.1 に示す全炉心体系の計算を行うとする。ただし、燃料集合体内が均質化されているとする。

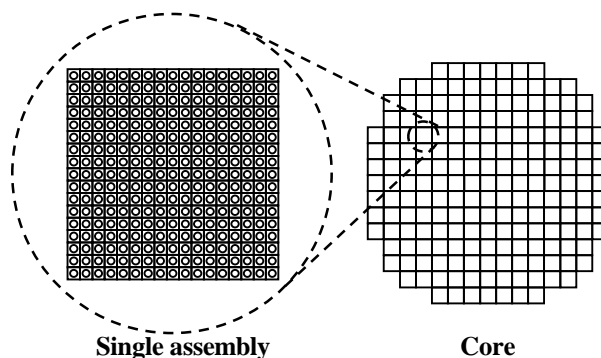


Figure 2.2.3.1 燃料集合体と全炉心体系

2.2.2 項で述べたように、全炉心体系の非均質計算の結果から計算された DF (Reference DF, Ref-DF) を用いれば、この均質全炉心計算は非均質全炉心計算の結果を再現できる。しかし、非均質全炉心計算の結果がすでに分かっているのであれば、均質全炉心計算を行う必要がない。つまり、非均質全炉心計算の結果から得られる均質化パラメータである Ref-DF は実用的ではない。そのため、Ref-DF の代わりに、完全反射境界条件を仮定した単一集合体体系での非均質計算の結果から計算された DF (Single assembly DF, SA-DF) が均質全炉心計算に用いられている。

Ref-DF と SA-DF の違いについて考える。SA-DF は Figure 2.2.3.2 に示すように、完全反射境界条件を仮定した単一集合体体系での非均質計算より得られる。一方、Ref-DF は Figure 2.2.3.2 に示すよう

に、炉心体系での表面中性子流を境界条件とした単一集合体体系での非均質計算(炉心体系での計算結果を完全に再現する)より得られると考えることができる。そのため、Ref-DF と SA-DF の違いは、DF を計算する単一集合体体系の境界条件の違いに起因する。それ故、境界条件に対する DF の依存性が小さければ、Ref-DF と SA-DF の違いは小さくなり、SA-DF が Ref-DF の良い近似となる。

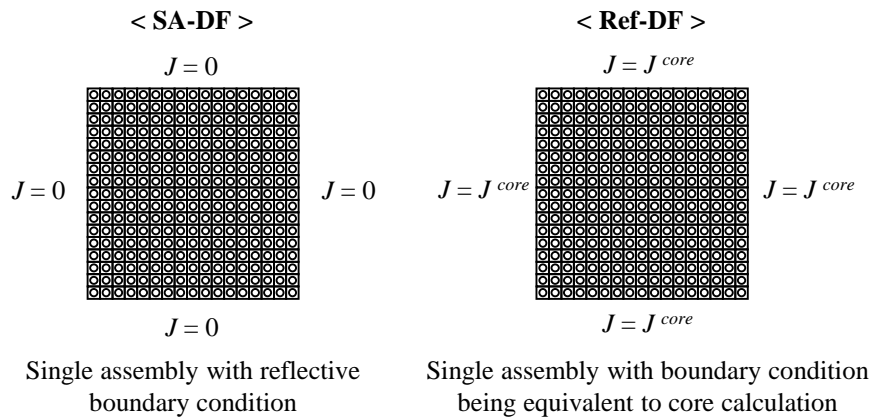


Figure 2.2.3.2 SA-DF と Ref-DF の計算体系

SA-DF は集合体均質化の場合には Assembly discontinuity factor (ADF)、pin-by-pin 均質化の場合には Pin cell discontinuity factor (PDF)と呼ばれる。ADF と PDF の特徴を以下に示す。

- **ADF:** 集合体均質化の場合の SA-DF。拡散計算に基づくノード法で広く用いられている。集合体均質化では均質単一集合体内の中性子束の空間分布がフラットであり非均質体系の領域平均全中性子束と等しくなるため、ADF は非均質体系の領域平均全中性子束と領域表面全中性子束の比で求められる。
- **PDF:** pin-by-pin 均質化の場合の SA-DF。PDF はピンセル表面毎に与える必要があり、データ量が多くなる。pin-by-pin 均質化では DF でなく SPH 因子が使われることが多い[3,4]。

2.3. GET 以外の均質化誤差低減手法

GET 以外の均質化誤差低減手法として equivalence theory (ET)、current discontinuity factor (CDF)及び superhomogenization (SPH)法について説明する。

2.3.1. Equivalence theory (ET)

Equivalence theory (ET)は GET の基となった理論である[1]。ET は 2.2.1 節で述べた GET における DF と同様の考え方で DF(ET において DF は heterogeneity factor と呼ばれる)を決める。ただし、ET では、例えば 2 次元体系であれば Figure 2.3.1.1 に示すように x 方向、y 方向それぞれの 2 つの表面に対する DF が等しくなるように拡散係数を調整する。そのため、拡散係数は x 方向と y 方向で異なる値を持つ。ET はこのように、各方向の 2 つの表面に対する DF が等しく、拡散係数が方向依存性を持つ。なお、GET では拡散係数の値は任意である。

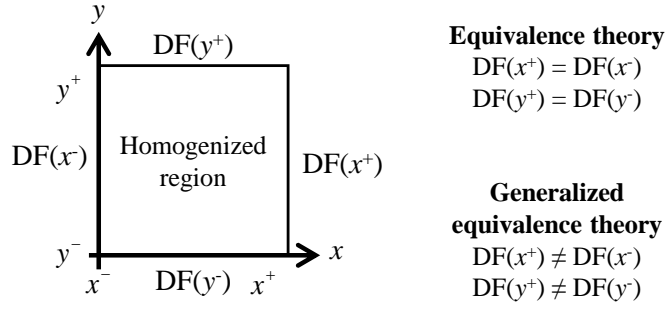


Figure 2.3.1.1 SA-DF と Ref-DF の計算体系

2.2.2 節の 1 次元有限差分法 1 メッシュの場合を例として ET における DF の計算方法を説明する。
2.2.2 節の結果より、DF は次式で表される。

$$f_{i\pm 1/2,g} = \frac{\phi_{i\pm 1/2,g}^{het,s(i)}}{\phi_{i\pm 1/2,g}^{hom,s(i)}} = \frac{\phi_{i\pm 1/2,g}^{het,s(i)}}{\bar{\phi}_{i,g}^{het} \mp \frac{J_{i\pm 1/2,g}^{het,s(i)}}{\bar{D}_{i,g}}} \quad (2.3.1.1)$$

ここで、ET における DF は次式を満たす必要がある。

$$f_{i+1/2,g} = f_{i-1/2,g} \quad (2.3.1.2)$$

(2.3.1.1)式及び(2.3.1.2)式より $\bar{D}_{i,g}$ が次式で表される。

$$\bar{D}_{i,g} = \frac{\phi_{i-1/2,g}^{het,s(i)} J_{i+1/2,g}^{het,s(i)} + \phi_{i+1/2,g}^{het,s(i)} J_{i-1/2,g}^{het,s(i)}}{(\phi_{i-1/2,g}^{het,s(i)} - \phi_{i+1/2,g}^{het,s(i)}) \bar{\phi}_{i,g}^{het}} \quad (2.3.1.3)$$

(2.3.1.3)式を(2.3.1.1)式に代入することで DF の計算式を得る。

$$f_{i+1/2,g} = f_{i-1/2,g} = \frac{\phi_{i-1/2,g}^{het,s(i)} J_{i+1/2,g}^{het,s(i)} + \phi_{i+1/2,g}^{het,s(i)} J_{i-1/2,g}^{het,s(i)}}{(J_{i-1/2,g}^{het,s(i)} + J_{i+1/2,g}^{het,s(i)}) \bar{\phi}_{i,g}^{het}} \quad (2.3.1.4)$$

ET について特に記すべきことを以下に挙げる。

- ET では同方向の DF が等しくなるようにその方向の拡散係数を調整するため、1、2、3 次元体系のいずれにおいても 1 つの均質化領域に対して必要な均質化定数(DF、均質化拡散係数、均質化断面積)の数が GET よりも 1 つ少なく済む。そのため、計算に要するメモリ量を減らすことができる。
- 同方向の DF が等しくなるようにその方向の拡散係数を決めるため、拡散係数が非物理的な値をとることがある。例えば、(2.2.1.3)式で調整された拡散係数を計算する場合、 $\phi_{i-1/2,g}^{het,s(i)} - \phi_{i+1/2,g}^{het,s(i)}$ が 0 に近い値を取るときに拡散係数が異常に大きくなりうる。
- Ref. [1]の 1 次元体系での検証によれば、GET は ET よりも均質化誤差をよく低減できる。

2.3.2. Current discontinuity factor (CDF)

Current discontinuity factor (CDF)について説明する[2]。CDFはGETにおけるDFと同様に中性子流を保存することを考えることで導出することができる。異なるのは、GETにおけるDFが非均質体系と均質体系の領域表面全中性子束の比で定義されるのに対して、CDFは次式に示すように非均質体系と均質体系の領域表面部分中性子流の比で定義される点である。

$$f^{CDF\pm} \equiv \frac{J^{het,\pm,s}}{J^{hom,\pm,s}} \quad (2.3.2.1)$$

ただし、部分中性子流は領域表面の法線ベクトル(領域外向き)を用いて次式で定義される。

$$J^{\pm} = \int_{\pm\vec{n}\cdot\vec{\Omega}>0} \vec{n}\cdot\vec{\Omega}\psi d\vec{\Omega} \quad (2.3.2.2)$$

CDFは次式のように、部分中性子流の連続性に関する式に用いることができる。

$$f_{i+1/2,g}^{CDF\pm,s(i)} J_{i+1/2,g}^{hom,\pm,s(i)} = f_{i+1/2,g}^{CDF\pm,s(i+1)} J_{i+1/2,g}^{hom,\pm,s(i+1)} \quad (2.3.2.3)$$

しかし、(2.3.2.3)式の形式で均質計算を行う場合、+方向と-方向両方の部分中性子流に対するCDFを用いなければならないため、GETにおけるDFよりも必要な記憶量が増えてしまう。

そこで、CDFを全中性子束に対するDFに帰着させることを考える。(2.3.2.1)式を変形すると次式がなりたつことからわかるように、CDFのコンセプトは、DFを用いることで均質体系の結果から非均質体系の部分中性子流を再現するという点である。

$$J^{hom,\pm,s} f^{CDF\pm} = J^{het,\pm,s} \quad (2.3.2.4)$$

ここで、DFを用いる均質拡散計算において次式が成り立つ。

$$J^{hom,\pm,s} = \frac{1}{4}\phi^{hom,s} \pm \frac{1}{2}J^{hom,s} = \frac{1}{4}\phi^{hom,s} \pm \frac{1}{2}J^{het,s} \quad (2.3.2.5)$$

(2.3.2.5)式は部分中性子流の定義より導ける。また、 $J^{hom,s} = J^{het,s}$ としたのは、DFを用いることで中性子流が保存される状況を想定しているためである。上記のCDFのコンセプトを全中性子束に対するDFに帰着させるため、次式のように均質体系の全中性子束から非均質体系の部分中性子流を再現できるとする。

$$J^{het,\pm,s} = \frac{1}{4}f\phi^{hom,s} \pm \frac{1}{2}J^{het,s} \quad (2.3.2.6)$$

(2.3.2.6)式より、全中性子束に対するDFを次式で表すことができる。

$$f = 2 \frac{J^{het,+s} + J^{het,-s}}{\phi^{hom,s}} \quad (2.3.2.7)$$

CDFを均質計算に適用する場合は、上記のように、CDFを直接用いるのではなく、そのコンセプト(DFを用いることで均質体系の結果から非均質体系の部分中性子流を再現する)を帰着させた(2.3.2.7)式の全中性子束に対するDFを用いる。

2.3.3. Superhomogenization (SPH)法

Superhomogenization (SPH)法について説明する[3,4]。均質化誤差は、領域内の中性子漏れ量を保存できないことが原因であった。上記の GET や ET、CDF では領域表面の中性子流を保存することで、領域内の中性子漏れ量(ある領域表面での中性子流の総和)を保存していた。SPH 法では、領域表面の中性子流については考えず、領域内の中性子漏れ量のみを保存し、均質化誤差を取り除く。

解の自由度と与えられる拘束条件(保存できる量)の数の関係から、各領域表面で中性子流を保存するためには各領域表面それぞれに対して均質化パラメータを導入して自由度を増やすことが必要である(簡単に言えば、保存したい量と同じ数だけ均質化パラメータを導入する必要がある)。例えば 2次元体系の GET であれば、 x_+ 、 x_- 、 y_+ 、 y_- 表面それぞれに DF を与えるため、1つの均質化領域に対して4つの均質化パラメータが必要となる。同様に考えると、領域内の中性子漏れ量を保存するためには、各均質化領域に対して1つの均質化パラメータを導入すれば十分である。この観点から SPH 法では各均質化領域に対して1つの DF(以降では region-wise DF と呼ぶ)を与える。これは、Figure 2.3.3.1 の2次元体系での例で示すように、すべての表面で DF が等しい値を取るという意味である。なお、SPH 法では ET と異なり、領域表面中性子流を保存することを考えないため拡散係数を調整する必要がないことに注意して欲しい。

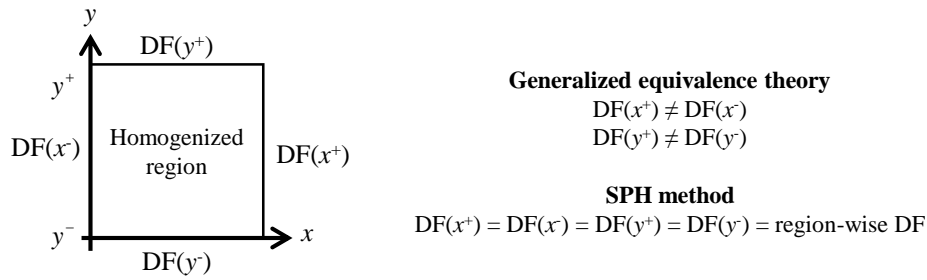


Figure 2.3.3.1 SPH 法における region-wise DF

SPH 法では、region-wise DF を SPH 因子と呼ばれる均質化パラメータに帰着させる。SPH 因子について簡単に説明する。まず、次式に示す region-wise DF を用いた均質体系の拡散方程式について考える。

$$-\bar{D}_{i,j,g} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \phi_g^{hom}(x, y) + \bar{\Sigma}_{t,i,j,g} \phi_g^{hom}(x, y) = Q_g^{hom}(x, y) \quad (2.3.3.1)$$

$$Q_g^{hom}(x, y) \equiv \sum_{g'} \bar{\Sigma}_{s,i,j,g' \rightarrow g} \phi_{g'}^{hom}(x, y) + \frac{\bar{\chi}_{i,j,g}}{k_{eff}^{hom}} \sum_{g'} \bar{v} \bar{\Sigma}_{f,i,j,g'} \phi_{g'}^{hom}(x, y) \quad (2.3.3.2)$$

$$\begin{aligned} f_{i-1,j,g}^{region} \phi_{i-1/2,j,g}^{hom,s(i-1,j)} &= f_{i,j,g}^{region} \phi_{i-1/2,j,g}^{hom,s(i,j)}, & f_{i,j,g}^{region} \phi_{i+1/2,j,g}^{hom,s(i,j)} &= f_{i+1,j,g}^{region} \phi_{i+1/2,j,g}^{hom,s(i+1,j)} \\ f_{i,j-1,g}^{region} \phi_{i,j-1/2,g}^{hom,s(i,j-1)} &= f_{i,j,g}^{region} \phi_{i,j-1/2,g}^{hom,s(i,j)}, & f_{i,j,g}^{region} \phi_{i,j+1/2,g}^{hom,s(i,j)} &= f_{i,j+1,g}^{region} \phi_{i,j+1/2,g}^{hom,s(i,j+1)} \end{aligned} \quad (2.3.3.3)$$

なお、ここでは2次元体系で考えるが、1次元及び3次元体系においても同様の議論ができる。ここで、region-wise DF と中性子束の積で表される次の量 $\tilde{\phi}$ を導入する。

$$f^{region} \phi^{hom} = \tilde{\phi}^{hom} \quad (2.3.3.4)$$

$\tilde{\phi}$ を用いて(2.3.3.1)-(2.3.3.3)式は次式で表される。

$$-\mu_{i,j,g} \bar{D}_{i,j,g} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \tilde{\phi}_g^{hom}(x,y) + \mu_{i,j,g} \bar{\Sigma}_{t,i,j,g} \tilde{\phi}_g^{hom}(x,y) = Q_g^{hom}(x,y) \quad (2.3.3.5)$$

$$Q_g^{hom}(x,y) \equiv \sum_{g'} \mu_{i,j,g'} \bar{\Sigma}_{s,i,j,g' \rightarrow g} \tilde{\phi}_{g'}^{hom}(x,y) + \frac{\bar{\chi}_{i,j,g}}{k_{eff}^{hom}} \sum_{g'} \mu_{i,j,g'} \bar{\nu} \bar{\Sigma}_{f,i,j,g'} \tilde{\phi}_{g'}^{hom}(x,y) \quad (2.3.3.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{i-1/2,j,g}^{hom,s(i-1,j)} &= \tilde{\phi}_{i-1/2,j,g}^{hom,s(i,j)}, & \tilde{\phi}_{i+1/2,j,g}^{hom,s(i,j)} &= \tilde{\phi}_{i+1/2,j,g}^{hom,s(i+1,j)} \\ \tilde{\phi}_{i,j-1/2,g}^{hom,s(i,j-1)} &= \tilde{\phi}_{i,j-1/2,g}^{hom,s(i,j)}, & \tilde{\phi}_{i,j+1/2,g}^{hom,s(i,j)} &= \tilde{\phi}_{i,j+1/2,g}^{hom,s(i,j+1)} \end{aligned} \quad (2.3.3.7)$$

ただし、 μ は SPH 因子であり次式で定義される。

$$\mu_{i,j,g} \equiv \frac{1}{f_{i,j,g}^{region}} \quad (2.3.3.8)$$

(2.3.3.1)-(2.3.3.3)式と(2.3.3.5)-(2.3.3.7)式は完全に等価であることに注意されたい。ここで、次式に示す SPH 因子を乗じた断面積を導入する。

$$\tilde{D}_{i,j,g} \equiv \mu_{i,j,g} \bar{D}_{i,j,g}, \quad \tilde{\Sigma}_{R,i,j,g} \equiv \mu_{i,j,g} \bar{\Sigma}_{R,i,j,g}, \quad (2.3.3.9)$$

この調整された断面積を用いて(2.3.3.5)式及び(2.3.3.6)式は次式で表される。

$$-\tilde{D}_{i,j,g} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \tilde{\phi}_g^{hom}(x,y) + \tilde{\Sigma}_{t,i,j,g} \tilde{\phi}_g^{hom}(x,y) = Q_g^{hom}(x,y) \quad (2.3.3.10)$$

$$Q_g^{hom}(x,y) \equiv \sum_{g'} \tilde{\Sigma}_{s,i,j,g' \rightarrow g} \tilde{\phi}_{g'}^{hom}(x,y) + \frac{\bar{\chi}_{i,j,g}}{k_{eff}^{hom}} \sum_{g'} \tilde{\nu} \bar{\Sigma}_{f,i,j,g'} \tilde{\phi}_{g'}^{hom}(x,y) \quad (2.3.3.11)$$

SPH 因子を用いた均質計算を実際に行う場合、 ϕ の微分方程式である(2.3.3.1)-(2.3.3.3)式ではなく、 $\tilde{\phi}$ の微分方程式である(2.3.3.10)式、(2.3.3.11)式及び(2.3.3.7)式を解くことで、SPH 因子が乗じられた均質化断面積以外の DF 等の均質化パラメータを陽に用いることなく計算を行うことができる。

SPH 法は均質化パラメータを陽に取り扱う必要が無く、計算に要するデータ量を減らすことができるため、膨大なデータ量を要する pin-by-pin 均質計算で用いられている。

SPH 法で用いられる SPH 因子は反復法を用いて計算することができる[3,4]。2次元体系を例として SPH 因子の計算方法を以下に示す。

- (1) 非均質計算を行い均質化断面積 $\bar{\Sigma}_{R,i,j,g}$ (拡散係数も含む)及び領域平均中性子束 $\bar{\phi}_{i,j,g}^{het}$ を得る。
- (2) SPH 因子 μ の初期値を与える($\mu = 1$)。
- (3) (2.3.3.9)式を用いて調整された断面積 $\tilde{\Sigma}$ を計算する。
- (4) $\tilde{\Sigma}$ を用いて(2.3.3.10)式の方程式を解く。
- (5) Step (4)の結果より領域平均中性子束 $\tilde{\phi}_{i,j,g}^{hom}$ を計算する。 $\bar{\phi}_{i,j,g}^{het}$ と $\tilde{\phi}_{i,j,g}^{hom}$ を体系全体で体積積分した量が等しくなるように次式で規格化された領域平均中性子束 $\tilde{\phi}_{i,j,g}^{thom}$ を次式で計算する。この操作の意味については後述する。

$$\tilde{\phi}_{i,j,g}^{thom} = \tilde{\phi}_{i,j,g}^{hom} \frac{\sum_{i' \in All} \sum_{j' \in All} \bar{\phi}_{i',j',g}^{het} V_{i',j'}}{\sum_{i' \in All} \sum_{j' \in All} \tilde{\phi}_{i',j',g}^{hom} V_{i',j'}} \quad (2.3.3.12)$$

- (6) Step (4)の均質計算は最終的に非均質計算の結果を再現するはずである。そのため、 μ を作用され

ていない領域平均中性子束 $\bar{\phi}_{i,j,g}^{hom}$ は $\bar{\phi}_{i,j,g}^{hom} = \bar{\phi}_{i,j,g}^{het}$ を満たすはずである。また、(2.3.3.4)式と(2.3.3.8)式より、 $\bar{\phi}_{i,j,g}^{hom} = \mu_{i,j,g} \tilde{\phi}_{i,j,g}^{rhom}$ の関係が成り立つ。これらの関係より、次の反復での SPH 因子 μ を次式で計算する。

$$\mu_{i,j,g} = \frac{\bar{\phi}_{i,j,g}^{het}}{\tilde{\phi}_{i,j,g}^{rhom}} \quad (2.3.3.13)$$

(7) μ の収束判定を行い、収束していれば計算を終える。収束していなければ、Step (3)-(7)を繰り返す。

Step (5)の意味について説明する。上記の SPH 法の理論の説明では、自由度(未知数の数)と拘束条件(保存できる量)の数の関係から、領域内の中性子漏れ量を保存するためには、領域に対して 1 つの均質化パラメータ(SPH 因子)を与えて自由度を増やせば良いと説明した。このとき、自由度の増加数と与える拘束条件の数は以下のように表すことができる。ただし、以下では、単一集合体体系で SPH 因子を計算することを想定して、境界条件が完全反射であるとしている。

- **自由度の増加数： $N_I \times N_G$ 個**
 - SPH 因子(region-wise DF で考えても良い)の数、即ち $N_I \times N_G$ 個。ただし、 N_I と N_G はそれぞれ領域とエネルギー群の数である。
- **与える拘束条件の数： $(N_I - 1) \times N_G$ 個**
 - 与える拘束条件は「(均質体系の領域内中性子漏れ量) = (非均質体系の領域内中性子漏れ量)」である。この数は $(N_I - 1) \times N_G$ 個である。
 N_G に乗ずるのが N_I ではなく $N_I - 1$ である理由を説明する。この議論では均質計算及び非均質計算ともに境界条件が完全反射境界条件であることを想定しているため、体系から漏れる中性子の総量は同じ(どちらも 0)である。それ故に $N_I - 1$ 個の領域で上記の拘束条件が満たされれば残りの 1 つの領域でも拘束条件が満たされるため、拘束条件の数は $(N_I - 1) \times N_G$ 個となる。

このように、自由度の増加量よりも与える拘束条件の数は N_G 個だけ少ないため、SPH 因子を一意に決めるためには、各エネルギー群に対してもう 1 つの拘束条件を与える必要がある。Step (5)は各エネルギー群に新たな拘束条件を与える操作であり、SPH 因子を作用させた均質体系の中性子束 $\tilde{\phi}_g^{hom}$ の全体的なフラックスレベルが非均質体系の中性子束レベルと等しいという意味を持っている。しかし、 $\tilde{\phi}_g^{hom}$ が ϕ_g^{hom} に region-wise DF を乗じた量であるということを考えると、 $\tilde{\phi}_g^{hom}$ の全体的なフラックスレベルが ϕ_g^{het} のフラックスレベルと等しいということに物理的な根拠はない

SPH 因子について特に記すべきことを以下に挙げる。

- SPH 法は均質化パラメータを陽に取り扱う必要が無く、計算に要するデータ量を減らすことができるため、膨大なデータ量を要する pin-by-pin 均質計算で用いられている。
- SPH 因子も DF と同様に、単一集合体体系で評価される。単一集合体体系で得られた均質化パラメータを炉心体系に適用することを考えた場合、DF と比べて SPH 因子は集合体表面での不連続性をうまく取り扱えないという特徴がある。例えば、集合体均質化(集合体内を完全に均質化し 1 つの物質とする)に SPH 法を適用した場合、SPH 因子は 1 となり、均質化パラメータを用いない場合と等価になってしまう。集合体表面の不連続性をうまく SPH 因子に取り込む研究も行われて

いる[13]。

2.4. 本章のまとめ

本章では不連続因子(DF)の説明を行った。2.1 節では DF を用いる背景である空間均質化について説明した。2.2 節では DF を用いる均質化理論である Generalized Equivalence Theory (GET)について説明した。2.3 節では GET 以外の均質化誤差低減手法について説明した。以下に各節の簡単なまとめを記す。

2.1 節では DF を用いる背景である空間均質化の数学的説明を行った。以下に重要な事柄を記す。

- 現在の炉心解析では、計算コストを低減するために空間均質化が行われる。空間均質化とは均質化領域内の幾何形状を均質なものとし、領域内で反応断面積を一定とする操作である。空間均質化の目標は、均質体系での計算が非均質体系での計算結果(増倍率、領域平均反応率)を再現することである。
- 均質化断面積は(2.1.8)式に示すように領域内の反応断面積を全中性子束重みで平均化することで計算される。体積重みでなく全中性子束重みで平均化するのは、領域平均反応率を均質計算で再現するためである。

$$\bar{\Sigma}_{R,i,g} \equiv \frac{\int_{V_i} \Sigma_{R,g}(\vec{r}) \phi_g^{het}(\vec{r}) dV}{\int_{V_i} \phi_g^{het}(\vec{r}) dV} \quad (\text{再掲}) (2.1.8)$$

- 全中性子束重みの均質化断面積を用いるだけでは、中性子の漏れ量を保存できず、結局領域平均反応率も再現できない。

2.2 節では GET の概要として、拡散方程式における DF (DifDF)の理論とその計算手順、単一集合体体系での DF の評価について説明した。以下に重要な事柄を記す。

- GET は空間均質化に関する理論の 1 つである。GET では、DF を用いて領域表面中性子流を保存することで中性子漏れ量(ある領域表面での中性子流の総和)を保存する。
- DifDF は領域表面正味中性子流が保存されるように(2.4.1)式で定義される。また、DifDF は均質計算中で領域表面での全中性子束の連続性に関する条件に対して(2.4.2)式に示すように用いられ、領域表面で全中性子束を不連続にする。

$$f \equiv \frac{\phi^{het,surface}}{\phi^{hom,surface}} \quad (2.4.1)$$

$$\int_{region I}^{surface S} \phi_{region I}^{hom,surface S} = \int_{region I+1}^{surface S} \phi_{region I+1}^{hom,surface S} \quad (2.4.2)$$

- DF は高次の方程式(輸送方程式や P_N 方程式)の輸送効果を低次の方程式(拡散方程式や SP3 方程式など)に取り込むことができる。また、空間均質化だけでなくエネルギー群縮約による誤差も取り除くことができる。
- reference とする非均質計算(例えば全炉心計算など)の結果から求められた DF (Reference DF, Ref-DF)を用いた場合、均質計算は非均質計算の結果を完全に再現できる。しかし、Ref-DF は

実用的ではない。そのため、実際には Ref-DF の代わりに完全版者境界条件を仮定した単一集合体体系で計算された DF (Single assembly DF, SA-DF) が用いられている。SA-DF は集合体均質化の場合 Assembly discontinuity factor (ADF)、pin-by-pin 均質化の場合には Pin cell discontinuity factor (PDF) と呼ばれる。

2.3 節では GET 以外の均質化誤差低減手法として、Equivalence theory (ET)、Current discontinuity factor (CDF) 及び Superhomogenization (SPH) 法について説明した。以下に重要な事柄を記す。

- **Equivalence theory (ET)**

- GET の基となった理論である。GET における DF と同様の考え方で DF (ET において DF は heterogeneity factor と呼ばれる) を決める。ただし、ET では、例えば 2 次元体系であれば x 方向、y 方向それぞれの 2 つの表面に対する DF が等しくなるように拡散係数を調整する。そのため、拡散係数は x 方向と y 方向で異なる値を持つ。

- **Current discontinuity factor (CDF)**

- CDF は GET における DF とほぼ同様の考え方で導出することができる。異なるのは、GET における DF が非均質体系と均質体系の領域表面全中性子束の比で定義されるのに対して、CDF は(2.4.3)式に示すように非均質体系と均質体系の領域表面部分中性子流の比で定義される点である。

$$f^{CDF\pm} \equiv \frac{J^{het,surface,\pm}}{J^{hom,surface,\pm}} \quad (2.4.3)$$

- 実際には CDF を均質計算に直接適用するのではなく、CDF のコンセプトを帰着させた全中性子束に対する DF を用いる。CDF のコンセプトが、「DF を用いることで均質体系の結果から非均質体系の部分中性子流を再現すること」であることを踏まえると、この DF は次式で計算される。

$$f = 2 \frac{J^{het,surface,+} + J^{het,surface,-}}{\phi^{hom,surface}} \quad (2.4.4)$$

- **Superhomogenization (SPH) 法**

- 均質化誤差は、領域内の中性子漏れ量を保存できないことが原因であった。GET や ET、CDF では領域表面の中性子流を保存することで、領域内の中性子漏れ量を保存していた。SPH 法では、領域表面の中性子流については考えず、領域内の中性子漏れ量のみを保存し、均質化誤差を取り除く。
- SPH 法では均質化パラメータとして SPH 因子を用いる。SPH 因子は領域に 1 つ与えた DF (全ての表面で DF の値が等しい) の逆数と等価である。
- SPH 法は均質化パラメータを陽に取り扱う必要が無く、計算に要するデータ量を減らすことができるため、膨大なデータ量を要する pin-by-pin 均質計算で用いられている。
- 単一集合体体系で得られた均質化パラメータを炉心体系に適用することを考えた場合、DF と比べて SPH 因子は集合体表面での不連続性をうまく取り扱えない。これは SPH 因子を用いた均質計算の精度悪化の一因となっている。集合体表面の不連続性をうまく SPH 因子に取り込む研究も行われている。

第3章 SP3 方程式における DF

本章では SP3 方程式における DF の提案を行う。その前に、まず、SP3 方程式における DF について説明しておく。

第2章で述べたように、拡散方程式は全中性子束 ϕ_0 に関する方程式であるため、DF は領域表面 ϕ_0 に対して適用され、DF は非均質体系と均質体系の領域表面 ϕ_0 の比で計算される。拡散方程式では各表面に対して1つの DF を与えるため、領域表面において中性子流のみを保存することができる。これは、領域表面において「中性子流が保存される」という条件を与えていると言い換えることができる。

一方、SP3 方程式は、詳しくは後述するが、全中性子束(0次モーメント) ϕ_0 と2次モーメント ϕ_2 に関する方程式であるため、DF は領域表面 ϕ_0 と ϕ_2 (もしくは ϕ_2 に関する量)に対して適用され、DF は非均質体系と均質体系の領域表面 ϕ_0 と ϕ_2 (もしくは ϕ_2 に関する量)の比で計算される。このように SP3 方程式では2つの DF を与えることができるため、領域表面において2つの量を保存することができる。これは領域表面において2つの条件を与えられると言い換えることができる。なお、その2つの条件のうちの1つは、非均質計算の結果を再現するために、拡散方程式における DF と同じ「中性子流が保存される」という条件でなくてはならない。しかし、もう1つの条件については任意である。

上で ϕ_2 (もしくは ϕ_2 に関する量)に対して DF を与えると述べたが、ここが SP3 方程式における DF の1つの難しさである。 ϕ_2 (もしくは ϕ_2 に関する量)の DF を計算するためには、非均質輸送計算(MOC など)の結果から非均質体系の ϕ_2 を計算する必要がある。しかし、SP3 方程式は経験的に導かれた方程式であるため、非均質輸送計算の結果から厳密に ϕ_2 を計算する方法は明らかになっていない。それ故に、非均質体系の ϕ_2 をどのように計算するかが問題となっている。

上記の特徴のため、SP3 方程式における DF は次の2つの事柄により差別化することができる。

- (1) 非均質輸送計算の結果から非均質体系の ϕ_2 をどのように計算するか。
- (2) 領域表面において、「中性子流が保存される」という条件に加えてあともう1つどのような条件を与えるか。

これを踏まえて、過去に提案された SP3 方程式における DF について以下で説明する。

- **Ref. [5]:** DF は全中性子束 ϕ_0 と2次モーメント ϕ_2 に対して適用され、領域表面において「中性子流が保存される」と「3次モーメントが保存される」という2つの条件が与えられる。なお、2次モーメント ϕ_2 と同様に、非均質計算の結果から厳密に3次モーメントを計算する方法は明らかになっていない。非均質計算での2次及び3次モーメントは非均質計算の領域表面中性子流から近似的に計算される。
- **Ref. [6]:** DF は、全中性子束 ϕ_0 と $\Phi = \phi_0 + 2\phi_2$ に対して適用される。後述するが、 ϕ_2 の代わりに Φ に対する DF を考えることで計算の不安定性を回避することができる。領域表面において「中性子流が保存される」と「 ϕ_0 の DF が拡散方程式における DF と等しい」という2つの条件が与えられる。非均質体系の2次モーメント ϕ_2 は、非均質計算より得られた部分中性子流から近似的に計算される。なお、この ϕ_2 の計算方法は本論文で提案する SP3 方程式における DF でも参考に

している。

SP3 方程式における DF はこのように過去にいくつか提案されているが、近年活発に研究され始めた段階である。そのため、どのような非均質体系の ϕ_2 の計算方法で、どのような条件を領域表面に対して与えた DF が良い性質(均質化誤差の低減性能など)を持つかについてはまだ明らかになっていない。そのため、本論文では SP3 方程式に対する新しい DF を提案し、その性質(均質化誤差低減量やその他の特徴)を検証することを目的としている。

具体的には、SP3 方程式における DF として Individual Discontinuity Factor (DF) と Unitary Discontinuity Factor (DF) の提案と検証を行う。

Individual DF は中性子束 ϕ_0 と $\Phi = \phi_0 + 2\phi_2$ に対して適用され、領域表面において「中性子流が保存される」と「3 次モーメントが保存される」という 2 つの条件が与えられる。非均質体系の 2 次モーメント ϕ_2 は Ref. [6] の方法を参考にして、非均質計算より得られた部分中性子流より近似的に計算される。3 次モーメントは、非均質計算より得られた部分中性子束より近似的に計算される。この 3 次モーメントの計算方法は本論文で提案するものである。

Unitary DF は中性子束 ϕ_0 と $\Phi = \phi_0 + 2\phi_2$ に対して適用され、領域表面において次の条件が与えられる。

- 領域表面中性子流 J_1 を保存する。
- 体系の境界表面以外の領域表面においては ϕ_0 に対する DF と Φ に対する DF が等しく、3 次モーメント J_3 が連続である。
- DF を計算する体系の境界表面においては ϕ_0 と Φ でそれぞれ別々に DF を与える。

非均質体系の 2 次モーメント ϕ_2 は Individual DF と同様に計算される。

3.1 節では Individual DF と Unitary DF の理論を導くのに必要な事柄について説明する。3.2 節では過去に提案された SP3 方程式における DF について説明する。3.3 節と 3.4 節ではそれぞれ Individual DF と Unitary DF の理論の説明を行う。3.4 節では Individual DF と Unitary DF の検証を 2 次元カラーセット体系で行う。3.5 節に本章のまとめを記す。

3.1. SP3 方程式

本節では、SP3 方程式における DF について考えるにあたって必要となる事柄を説明する。3.1.1 節では P_N 方程式について簡単に説明し、3.1.2 節で SP3 方程式の理論について述べる。その後、3.1.3 節で SP3 方程式における角度中性子束と角度モーメントの関係について述べる。最後に、3.1.4 節で角度モーメントと部分角度モーメントの関係について述べ、2 次モーメント及び 3 次モーメントの計算方法について述べる。

3.1.1. P_N 方程式

P_N 方程式は輸送方程式を実球面調和関数展開した結果得られる方程式である[14]。本項ではこの P_N 方程式の導出について簡単に説明する。

次式に示す 3 次元輸送方程式を実球面調和関数展開することを考える。ただし簡単のため等方散乱を仮定する。

$$\Omega_x \frac{d\psi}{dx} + \Omega_y \frac{d\psi}{dy} + \Omega_z \frac{d\psi}{dz} + \Sigma_t \psi(\vec{\Omega}) = Q \quad (3.1.1.1)$$

角度中性子束は次式に示すように、実球面調和関数を用いて表すことができる。

$$\begin{aligned} \psi(\vec{\Omega}) &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \phi_0^0 R_0^0(\vec{\Omega}) + 3 \sum_{m=-1}^1 \phi_1^m R_1^m(\vec{\Omega}) + 5 \sum_{m=-2}^2 \phi_2^m R_2^m(\vec{\Omega}) + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sum_{m=-l}^l \phi_l^m R_l^m(\vec{\Omega}) \end{aligned} \quad (3.1.1.2)$$

ただし、ここで $R_l^m(\vec{\Omega})$ は実球面調和関数であり、その詳しい説明は[15]を参照してほしい。このように、角度中性子束は角度モーメント ϕ_l^m と実球面調和関数の積の和として表される。実球面調和関数は次式に示す直交性を持っている。

$$\int_{4\pi} R_l^m(\vec{\Omega}) R_{l'}^{m'}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (3.1.1.3)$$

また、立体角の x, y, z と成分と次の関係を持つ。

$$\Omega_x = R_1^1(\vec{\Omega}) \quad (3.1.1.4)$$

$$\Omega_y = R_1^{-1}(\vec{\Omega}) \quad (3.1.1.5)$$

$$\Omega_z = R_1^0(\vec{\Omega}) \quad (3.1.1.6)$$

P_N 方程式では、角度中性子束が次式に示すように有限の実球面調和関数で表されると近似する。

$$\psi(\vec{\Omega}) \approx \frac{1}{4\pi} \left\{ \phi_0^0 R_0^0(\vec{\Omega}) + 3 \sum_{m=-1}^1 \phi_1^m R_1^m(\vec{\Omega}) + \dots + (2N+1) \sum_{m=-N}^N \phi_N^m R_N^m(\vec{\Omega}) \right\} \quad (3.1.1.7)$$

(3.1.1.7)式及び(3.1.1.4)-(3.1.1.6)式を(3.1.1.1)式に代入することで次式を得る。

$$\begin{aligned} & R_1^1(\vec{\Omega}) \frac{d}{dx} \frac{1}{4\pi} \left\{ \phi_0^0 R_0^0(\vec{\Omega}) + \dots + (2N+1) \sum_{m=-N}^N \phi_N^m R_N^m(\vec{\Omega}) \right\} \\ & + R_1^{-1}(\vec{\Omega}) \frac{d}{dy} \frac{1}{4\pi} \left\{ \phi_0^0 R_0^0(\vec{\Omega}) + \dots + (2N+1) \sum_{m=-N}^N \phi_N^m R_N^m(\vec{\Omega}) \right\} \\ & + R_1^0(\vec{\Omega}) \frac{d}{dz} \frac{1}{4\pi} \left\{ \phi_0^0 R_0^0(\vec{\Omega}) + \dots + (2N+1) \sum_{m=-N}^N \phi_N^m R_N^m(\vec{\Omega}) \right\} \\ & + \Sigma_t \frac{1}{4\pi} \left\{ \phi_0^0 R_0^0(\vec{\Omega}) + \dots + (2N+1) \sum_{m=-N}^N \phi_N^m R_N^m(\vec{\Omega}) \right\} = Q \end{aligned} \quad (3.1.1.8)$$

(3.1.1.8)式の両辺に実球面調和関数をかけ全立体角で積分し、(3.1.1.3)式の直交性を利用することで角度モーメントに関する方程式を得ることができる。例えば、両辺に $R_0^0(\vec{\Omega})$ をかけ全立体角で積分することで次式を得る。

$$\frac{d\phi_1^1}{dx} + \frac{d\phi_1^{-1}}{dy} + \frac{d\phi_1^0}{dz} + \Sigma_t \phi_0 = 4\pi Q \quad (3.1.1.9)$$

実球面調和関数は $(N+1)^2$ 個あるため、それらすべてで同様の手順を行うことで、(3.1.1.9)式のような角

度モーメントに関する方程式を $(N+1)^2$ 個得る。この $(N+1)^2$ 個の角度モーメントに関する方程式を P_N 方程式と呼ぶ。 P_N 方程式において、 N を ∞ とすると輸送方程式と等価になる。

また、 P_1 方程式は拡散方程式と呼ばれている。拡散方程式は次式で表される。

$$\nabla \cdot \vec{J}_1 + \Sigma_r \phi_0 = Q_0 \quad (3.1.1.10)$$

$$\vec{J}_1 = -D_1 \nabla \phi_0 \quad (3.1.1.11)$$

ただし、

$$Q_0 = \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s, g' \rightarrow g} \phi_{0, g'} + \frac{\chi_g}{k} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f, g'} \phi_{0, g'} \quad (3.1.1.12)$$

$$\phi_0 = \phi_0^0 \quad (3.1.1.13)$$

$$\vec{J}_1 = (\phi_1^1, \phi_1^{-1}, \phi_1^0) \quad (3.1.1.14)$$

である。(3.1.1.13)式及び(3.1.1.14)式に示したように、全中性子束は0次の角度モーメント、中性子流は1次の角度モーメントに対応している。

以上が P_N 方程式の導出である。なお、1次元平板体系においては、実球面調和関数でなくルジャンドル多項式で上記と同様の手順を行うことで P_N 方程式を導出できる。これは、1次元平板体系においては、中性子の飛行方向として平板の法線方向からの角度のみを考慮すれば良く、方位角方向の依存性を考慮する必要がないことによる。この条件では、実球面調和関数による展開は必要なく、ルジャンドル多項式による展開を適用できる。

3.1.2. SP3 方程式の理論

本節では SP3 方程式について説明する[16-19]。前節で述べたように P_N 方程式は N を大きくすることで近似が減り精度が良くなる。しかし、方程式数が $(N+1)^2$ 個となることに加え、式の形が煩雑(偏微分のクロスターム(例: $\partial^2 / \partial x \partial y$)を含むなど)であるため、これを解くにはかなりの労力を要する。

Simplified P_N (SP $_N$)方程式は、経験的な近似を用いて P_N 方程式の式数を減らし、さらにその形を簡単にしたものである。

導出

SP3 方程式を導出するためには、まず1次元体系の P3 方程式を導出する必要がある。1次元体系の P3 方程式を次式に示す。なお、この式は 3.1.1 項に示した手順で導くことができる。なお、以降では奇数次モーメントを ϕ でなく J で表す。

$$\frac{d}{dx} J_1 + \Sigma_r \phi_0 = Q_0 \quad (3.1.2.1)$$

$$J_1 = -D_1 \frac{d}{dx} \phi_0 - 2D_1 \frac{d}{dx} \phi_2 \quad (3.1.2.2)$$

$$\frac{3}{5} \frac{d}{dx} J_3 + \Sigma_t \phi_2 + \frac{2}{5} \frac{d}{dx} J_1 = 0 \quad (3.1.2.3)$$

$$J_3 = -D_3 \frac{d}{dx} \phi_2 \quad (3.1.2.4)$$

ただし、

$$D_3 = \frac{9}{7} D_1 \quad (3.1.2.5)$$

ここで、 ϕ_0 、 J_1 、 ϕ_2 、 J_3 はそれぞれ0次モーメント(全中性子束)、1次モーメント(中性子流)、2次モーメント、3次モーメントである。

SP3 方程式は(3.1.2.1)-(3.1.2.4)式の d/dx を ∇ に置き換えるという経験的な近似を用いて導かれる。

$$\nabla \cdot \vec{J}_1 + \Sigma_r \phi_0 = Q_0 \quad (3.1.2.6)$$

$$\vec{J}_1 = -D_1 \nabla \phi_0 - 2D_1 \nabla \phi_2 \quad (3.1.2.7)$$

$$\frac{3}{5} \nabla \cdot \vec{J}_3 + \Sigma_r \phi_2 + \frac{2}{5} \nabla \cdot \vec{J}_1 = 0 \quad (3.1.2.8)$$

$$\vec{J}_3 = -D_3 \nabla \phi_2 \quad (3.1.2.9)$$

(3.1.2.6)-(3.1.2.9)式からわかるように、SP3 方程式は拡散方程式と似た形をしており、解きやすい形をしている。加えて、P3 方程式を近似したものであるため、拡散方程式(P1 方程式)よりも解析精度が良い。

数値計算

SP3 方程式を数値的に解く際には(3.1.2.6)-(3.1.2.9)式を以下に示すように変形する。まず、(3.1.2.6)式及び(3.1.2.8)式に(3.1.2.7)式及び(3.1.2.9)式を代入することで次式を得る。

$$-\nabla \cdot D_1 \nabla (\phi_0 + 2\phi_2) + \Sigma_r \phi_0 = Q_0 \quad (3.1.2.10)$$

$$-\frac{3}{5} \nabla \cdot D_3 \nabla \phi_2 + \Sigma_r \phi_2 = \frac{2}{5} \nabla \cdot D_1 \nabla (\phi_0 + 2\phi_2) \quad (3.1.2.11)$$

両式を変形することで次式を得る。

$$-\nabla \cdot D_1 \nabla \Phi + \Sigma_r \Phi = Q_0 + 2\Sigma_r \phi_2 \quad (3.1.2.12)$$

$$-\frac{3}{5} \nabla \cdot D_3 \nabla \phi_2 + \Sigma_r \phi_2 = \frac{2}{5} (\Sigma_r \phi_0 - Q_0) \quad (3.1.2.13)$$

ただし、

$$\Phi \equiv \phi_0 + 2\phi_2 \quad (3.1.2.14)$$

である。SP3 方程式を数値的に解く際には(3.1.1.12)式及び(3.1.1.13)式を用いる。つまり、 ϕ_0 と ϕ_2 ではなく、 Φ と ϕ_2 に関する微分方程式を解く形に帰着させる。 Φ を導入するのは、以下の理由のためである。

- ・ (3.1.2.2)式よりわかるように、 Φ を用いると中性子流の連続性の条件を考慮しやすい。
- ・ Φ を用いることなく(3.1.2.10)式を有限差分法で直接解くことを考えた場合、反復行列の対角優位性が失われることにより内部反復のスペクトル半径が1を超え、収束解が得られない場合がある。

以上が SP3 方程式の導出と、数値的に解く際に用いる式形の導出である。

3.1.3. 角度中性子束と角度モーメントの関係

本項では、SP3 方程式における角度中性子束と角度モーメントの関係について説明する。P_N 方程式は、3.1.1 項で述べたように角度中性子束(3.1.1.7)式で近似することで導出される。言い換えると、P_N 方程式において角度中性子束と角度モーメントは(3.1.1.7)式の関係を持っている。しかし、SP3 方程式は 3.1.2 項で述べたように経験的な近似を用いて導出されるため、SP3 方程式において角度中性子束と角度モーメントがどのような関係を持っているかは明らかになっていない。

角度中性子束と角度モーメントの関係が必要になる理由を説明する。2 章で述べたように DF を計算する際には、非均質計算で得られた角度中性子束から領域表面角度モーメントを計算する必要がある。例えば、拡散方程式における DF では領域表面 0 次モーメント ϕ_0 (全中性子束)、1 次モーメント J_1 (中性子流)が必要となる。ここで、拡散計算において角度中性子束と角度モーメントには次の関係が成り立つ。

$$\psi(\vec{\Omega}) \approx \frac{1}{4\pi} \left\{ \phi_0^0 R_0^0(\vec{\Omega}) + 3 \sum_{m=-1}^1 J_1^m R_1^m(\vec{\Omega}) \right\} \quad (3.1.3.1)$$

(3.1.3.1)式より、例えば x 方向の 1 次モーメント J_1^1 は角度中性子束から次式で計算される。

$$J_1^1 = \int_{4\pi} R_1^1(\vec{\Omega}) \psi(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad (3.1.3.2)$$

一方、SP3 方程式における DF を計算するためには領域表面 0 次モーメント ϕ_0 (全中性子束)、1 次モーメント J_1 (中性子流)、2 次モーメント ϕ_2 、3 次モーメント J_3 が必要となる。拡散方程式と異なり、SP3 方程式は経験的な近似を用いて導出されたため、角度中性子束と角度モーメントの関係が不明である。そのため、2 次モーメント ϕ_2 と 3 次モーメント J_3 を角度中性子束から計算出来ず、結局 SP3 方程式における DF を計算することができないという問題が生じる。

さて、Ref. [20]によると SP3 方程式での角度中性子束と角度モーメントの関係式は次式で表される。

$$\psi(\vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} (P_0(\mu_J) \phi_0 + 3P_1(\mu_J) J_1 + 5P_2(\mu_J) \phi_2 + 7P_3(\mu_J) J_3) \quad (3.1.3.3)$$

ただし、

$$J_1 = |\vec{J}_1| = \sqrt{(J_1^x)^2 + (J_1^y)^2 + (J_1^z)^2} \quad (3.1.3.4)$$

$$J_1^x = J_1^1, \quad J_1^y = J_1^{-1}, \quad J_1^z = J_1^0 \quad (3.1.3.5)$$

$$\mu_J = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}_J \quad (3.1.3.6)$$

$$\vec{\Omega}_J = \frac{\vec{J}_1}{|\vec{J}_1|} = \frac{1}{J_1} (J_1^x, J_1^y, J_1^z) \quad (3.1.3.7)$$

であり、 J_1 は中性子流の大きさ、 J_1^x 、 J_1^y 及び J_1^z はそれぞれ x, y, z 方向の中性子流を表している。ま

た、 $\vec{\Omega}_j$ は中性子流の方向ベクトル、 μ_j は中性子束の飛行方向と $\vec{\Omega}_j$ の方向余弦を表している。なお、Ref. [20] では(3.1.3.3)式でなく次式で表されているが、おそらくこれは J_3 が出てこないため間違いである。

$$\psi(\vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} (P_0(\mu_j)\phi_0 + 3P_1(\mu_j)J_1 + 5P_2(\mu_j)\phi_2) \quad (3.1.3.8)$$

(3.1.3.3)式の意味について簡単に説明する。3.1.2 節で SP3 方程式を導出した際に、1次元体系における P3 方程式を考え、それを拡張することで SP3 方程式を導出した。ここで疑問となるのは、どの方向に対する 1次元 P3 方程式を考えそれを拡張すれば良いのだろうか、ということである。中性子流の方向を軸とした 1次元体系における P3 方程式を考え、それを拡張することで SP3 方程式が導かれるとするのが(3.1.3.3)式である。(3.1.3.3)式から P_N 方程式と同様の考え方で次式に示す角度モーメントの方程式を導くことができる。

$$-\nabla \cdot D_1 \nabla (\phi_0 + 2\phi_2) + \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \frac{1}{\Sigma_r} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \frac{1}{\Sigma_r} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \phi_2 + \Sigma_r \phi_0 = Q_0 \quad (3.1.3.9)$$

$$-\frac{3}{5} \nabla \cdot D_3 \nabla \phi_2 + \frac{17}{35} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \frac{1}{\Sigma_r} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \frac{1}{\Sigma_r} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right) \phi_2 + \Sigma_r \phi_2 = \frac{2}{5} (\Sigma_r \phi_0 - Q_0) \quad (3.1.3.10)$$

ただし、両式中の \hat{x}, \hat{y} はそれぞれ中性子流の向きを \tilde{z} 軸(z 軸)としたときの x 軸、y 軸である。両式において第 2 項が無視できるほど小さいとすれば、SP3 方程式に一致する。

このことより、(3.1.3.3)式は SP3 方程式での角度中性子束と角度モーメントの関係を厳密に表しているわけではないことがわかる。しかし、SP3 方程式と似た形式の方程式を導けることからある程度の妥当性があると考え、本研究では SP3 方程式での角度中性子束と角度モーメントの関係が(3.1.3.3)式で表されるとする。

3.1.4. 角度モーメントと部分角度モーメントの関係

SP3 方程式の DF を計算する際には、非均質計算により求められた全中性子束 ϕ_0 及び中性子流 J_1 に加えて 2 次モーメント ϕ_2 と 3 次モーメント J_3 が必要である。非均質計算には一般的に 2 次元 MOC が用いられるため、2 次元 MOC で実用的に 2 次モーメント ϕ_2 と 3 次モーメント J_3 を計算する方法を考える必要がある。方法の一つは、SP3 方程式での角度中性子束と角度モーメントの関係(3.1.3.3)式に基づいて角度中性子束から(3.1.3.2)式のような形式で ϕ_2 と J_3 を計算する方法である。しかしこの方法は中性子流の方向ベクトルを必要とするなど手間がかかる。

そこで、本研究では、角度モーメントと部分角度モーメントの関係から ϕ_2 と J_3 を近似的に計算することを考える。2 次元 MOC で実用的に計算できる量には、角度モーメントである全中性子束 ϕ_0 及び中性子流 J_1 に加えて部分角度モーメントである部分中性子束 ϕ_0^\pm 及び部分中性子流 J_1^\pm がある。ただし、詳しくは後に述べるが、角度モーメントは全立体角で積分することで得られる量であるのに対し、部分角度モーメントは半立体角で積分することで得られる量である。角度モーメントと部分角度モーメントは関係性をもっており、例えば拡散方程式の枠組みにおいては角度中性子束が(3.1.3.1)式で表されることより次の関係が厳密に成り立つ。

$$\phi_0 = J_1^{n+} - J_1^{n-} \quad (3.1.4.1)$$

輸送方程式ではこの関係式が厳密には成り立たないが、この関係式を用いて部分中性子流から近似的に全中性子束を計算できる。SP3 方程式でもこのような関係式を導くことができれば、近似的に2次モーメント ϕ_2 と3次モーメント J_3 を計算できると考えられる。

本項では SP3 方程式における角度モーメントと部分角度モーメントの関係を導出する。そして、全中性子束と中性子流の部分角度モーメントから2次モーメント ϕ_2 と3次モーメント J_3 を近似的に計算する方法について説明する。なお、2次モーメント ϕ_2 の計算方法については Ref. [6] を参考にした。3次モーメント J_3 の計算方法については本研究で考案したものである。

Figure 3.1.4.1 に示す表面 S における角度モーメントと部分角度モーメントの関係について考える。ただし、Figure 3.1.4.1 の \vec{n} は表面 S の法線ベクトル、 $\vec{\Omega}_j$ は(3.1.3.7)式に示される中性子流の方向ベクトル、 θ_{jn} は \vec{n} と $\vec{\Omega}_j$ の成す角であり内積の定義より次式が成り立つ。

$$\cos \theta_{jn} = \vec{n} \cdot \vec{\Omega}_j \quad (3.1.4.2)$$

また、 \tilde{x} \tilde{y} \tilde{z} 座標系を以下のように設定する。

- \vec{n} の方向を \tilde{z} 軸とする。
- \tilde{x} 軸及び \tilde{y} 軸は表面 S に含まれる。
- \tilde{x} 軸、 \tilde{y} 軸及び \tilde{z} 軸は直交する。
- \tilde{x} \tilde{z} 平面に $\vec{\Omega}_j$ を含む。

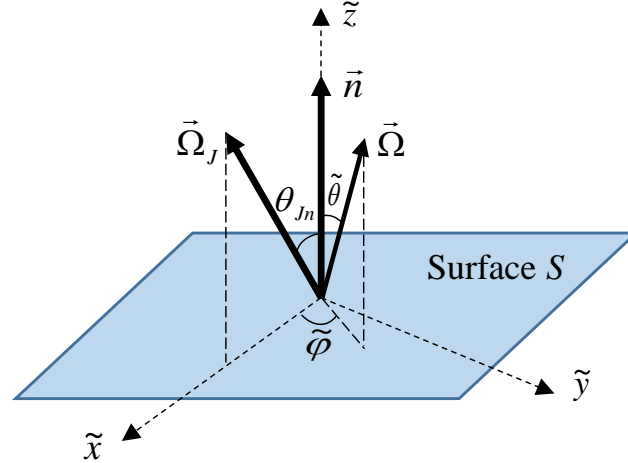


Figure 3.1.4.1 表面 S と \tilde{x} \tilde{y} \tilde{z} 座標系

\tilde{x} \tilde{y} \tilde{z} 座標系において $\vec{\Omega}_j$ と $\vec{\Omega}$ について次式が成り立つ。

$$\vec{\Omega}_j = (\sin \theta_{jn}, 0, \cos \theta_{jn}) \quad (3.1.4.3)$$

$$\vec{\Omega} = (\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi}, \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi}, \cos \tilde{\theta}) \quad (3.1.4.4)$$

ただし、 $\tilde{\theta}$ および $\tilde{\varphi}$ はそれぞれ \tilde{x} \tilde{y} \tilde{z} 座標系における極角、方位角に対応する。このとき、

$$\mu_j = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}_j = \cos \tilde{\theta} \cos \theta_{jn} + \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \sin \theta_{jn} \quad (3.1.4.5)$$

である。

2次モーメント

まず、2次モーメント ϕ_2 と部分中性子流の関係について考える。表面 S に対する部分中性子流を次式で定義する。

$$J_1^{\tilde{z}+} \equiv \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega} > 0} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} \psi(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad (3.1.4.6)$$

$$J_1^{\tilde{z}-} \equiv \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega} < 0} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} \psi(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad (3.1.4.7)$$

次式に示すように部分中性子流の和は \tilde{z} 軸方向の中性子流となる。

$$J_1^{\tilde{z}} = J_1^{\tilde{z}+} + J_1^{\tilde{z}-} = \int_{4\pi} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} \psi(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad (3.1.4.8)$$

一方、部分中性子流の差は次式で表される。

$$\begin{aligned} J_1^{\tilde{z}+} - J_1^{\tilde{z}-} &= \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega} > 0} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} \psi(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} + \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega} > 0} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} \psi(-\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \\ &= \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega} > 0} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} (\psi(\vec{\Omega}) + \psi(-\vec{\Omega})) d\vec{\Omega} \end{aligned} \quad (3.1.4.9)$$

なお、(3.1.4.9)式の変形には次の関係を用いている。

$$\int F(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = \int F(-\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad (3.1.4.10)$$

SP3 方程式における角度中性子束と角度モーメントの関係である(3.1.3.3)式を(3.1.4.9)式に代入することで次式を得る。なお、ルジャンドル多項式の奇数次が奇関数で偶数次が偶関数であることを用いた。

$$J_1^{\tilde{z}+} - J_1^{\tilde{z}-} = \frac{1}{2\pi} \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega} > 0} \vec{n} \cdot \vec{\Omega} (\phi_0 + 5P_2(\mu_J)\phi_2) d\vec{\Omega} \quad (3.1.4.11)$$

(3.1.4.11)式は次式で表される。

$$J_1^{\tilde{z}+} - J_1^{\tilde{z}-} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^{\pi/2} \cos\tilde{\theta} \{\phi_0 + 5P_2(\mu_J)\phi_2\} \sin(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} \quad (3.1.4.12)$$

(3.1.4.5)式を代入することで(3.1.4.12)式を解析的に積分できる。

$$J_1^{\tilde{z}+} - J_1^{\tilde{z}-} = \frac{1}{2}\phi_0 + \frac{5}{8}P_2(\cos(\theta_m))\phi_2 \quad (3.1.4.13)$$

(3.1.4.13)式より、2次モーメント ϕ_2 を次式で計算できる。

$$\phi_2 = \frac{8}{5P_2(\cos(\theta_J))} \left(J_1^{\tilde{z}+} - J_1^{\tilde{z}-} - \frac{1}{2}\phi_0 \right) \quad (3.1.4.14)$$

なお、(3.1.4.14)式は角度中性子束が(3.1.3.3)式で表されると仮定したときに成り立つ式であることに注意されたい。そのため輸送方程式では(3.1.4.14)式が厳密には成り立たないが、本論文では近似的に成り立つと仮定する。

さて、2次元体系での計算結果(MOCなど)から2次モーメント ϕ_2 を計算することを考える。(3.1.4.14)式において、計算の安定性の観点から $P_2(\cos(\theta_j))$ が0に近い値をとる、即ち $\cos(\theta_j)$ が $1/\sqrt{3}$ に近い値をとることは好ましくない。ここで、2次元体系では中性子流の方向ベクトルは必ずxy平面に含まれる。よって、Figure 3.1.4.1の表面Sをxy平面とすれば必ず $\cos(\theta_j) = 0$ となり安定に計算できる。また2次元体系では、角度中性子束がz+方向とz-方向で対象であるため、 $J_1^{z+} = J_1^{z-}$ となる。このとき、(3.1.4.14)式より ϕ_2 は全中性子束とz軸方向の部分中性子流を用いて次式で計算される。

$$\phi_2 = -\frac{16}{5} \left(2J_1^{z+} - \frac{1}{2}\phi_0 \right) \quad (3.1.4.15)$$

ただし、z軸方向の部分中性子流は次式で定義される。

$$J_1^{z+} \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \cos \theta \psi(\vec{\Omega}), \quad J_1^{z-} \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta d\theta \cos \theta \psi(\vec{\Omega}) \quad (3.1.4.16)$$

また、MOCでの表面平均部分中性子流の計算についてはAppendix Bを参照されたい。

3次モーメント

次に、3次モーメント J_3 と部分中性子束の関係について考える。上記の ϕ_2 の議論と同様に考える。Figure 3.1.4.1の表面Sに対する部分中性子束を次式で定義する。

$$\phi_0^{\tilde{z}+} \equiv \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega} > 0} \psi(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad (3.1.4.17)$$

$$\phi_0^{\tilde{z}-} \equiv \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega} < 0} \psi(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad (3.1.4.18)$$

次式に示すように部分中性子流の和は中性子流となる。

$$\phi_0 = \phi_0^{\tilde{z}+} + \phi_0^{\tilde{z}-} = \int_{4\pi} \psi(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad (3.1.4.19)$$

一方、部分中性子流の差は次式で表される。

$$\begin{aligned} \phi_0^{\tilde{z}+} - \phi_0^{\tilde{z}-} &= \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega} > 0} \psi(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} - \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega} > 0} \psi(-\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \\ &= \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega} > 0} (\psi(\vec{\Omega}) - \psi(-\vec{\Omega})) d\vec{\Omega} \end{aligned} \quad (3.1.4.20)$$

SP3方程式における角度中性子束と角度モーメントの関係である(3.1.3.3)式を(3.1.4.20)式に代入することで次式を得る。

$$\phi_0^{\tilde{z}^+} - \phi_0^{\tilde{z}^-} = \frac{1}{2\pi} \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Omega} > 0} \{3P_1(\mu_J)J_1 + 7P_3(\mu_J)J_3\} d\vec{\Omega} \quad (3.1.4.21)$$

(3.1.4.21)式は次式で表される。

$$\phi_0^{\tilde{z}^+} - \phi_0^{\tilde{z}^-} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^{\pi/2} \{3P_1(\mu_J)J_1 + 7P_3(\mu_J)J_3\} \sin(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} \quad (3.1.4.22)$$

(3.1.4.22)式を代入することで(3.1.4.21)式を解析的に積分できる。

$$\phi_0^{\tilde{z}^+} - \phi_0^{\tilde{z}^-} = \frac{3}{2}J_1 P_1(\cos \theta_{Jn}) - \frac{7}{8}J_3 P_3(\cos \theta_{Jn}) \quad (3.1.4.23)$$

さて、ここで求めたいのは J_3 そのものではなく \tilde{z} 軸方向の J_3 である。ここで、 \tilde{z} 軸方向の中性子流 J_1 は次式で表される。

$$J_1^{\tilde{z}} = J_1 \vec{n} \cdot \vec{\Omega}_J = J_1 P_1(\cos \theta_{Jn}) \quad (3.1.4.24)$$

(3.1.4.24)式と同様の関係が 3 次モーメントにも成り立つと仮定すると、 \tilde{z} 軸方向の J_3 を次式で表すことができる。

$$J_3^{\tilde{z}} = J_3 P_3(\cos \theta_{Jn}) \quad (3.1.4.25)$$

(3.1.4.24)式及び(3.1.4.25)式を(3.1.4.23)式に代入し変形することで、 \tilde{z} 軸方向の J_3 を次式で計算できることがわかる。

$$J_3^{\tilde{z}} = -\frac{8}{7} \left(\phi_0^{\tilde{z}^+} - \phi_0^{\tilde{z}^-} - \frac{3}{2} J_1^{\tilde{z}} \right) \quad (3.1.4.26)$$

なお、(3.1.4.26)式は角度中性子束が(3.1.3.3)式で表されると仮定したときに成り立つ式であることに注意されたい。そのため輸送方程式では(3.1.4.26)式が厳密には成り立たないが、本論文では近似的に成り立つと仮定する。

さて、2次元体系での計算結果(MOC など)から x 軸及び y 軸方向の 3 次モーメントを計算することを考える。(3.1.4.26)式より、部分中性子束と中性子流を用いて、x 軸方向と y 軸方向の 3 次モーメントをそれぞれ(3.1.4.27)式と(3.1.4.28)式で計算できることがわかる。

$$J_3^x = -\frac{8}{7} \left(\phi_0^{x^+} - \phi_0^{x^-} - \frac{3}{2} J_1^x \right) \quad (3.1.4.27)$$

$$J_3^y = -\frac{8}{7} \left(\phi_0^{y^+} - \phi_0^{y^-} - \frac{3}{2} J_1^y \right) \quad (3.1.4.28)$$

ただし、x 軸及び y 軸方向の部分中性子束と中性子流はそれぞれ次式のように定義される。

$$\phi_0^{x^+} \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \psi(\vec{\Omega}), \quad \phi_0^{x^-} \equiv \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \psi(\vec{\Omega}) \quad (3.1.4.29)$$

$$\phi_0^{y^+} \equiv \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \psi(\vec{\Omega}), \quad \phi_0^{y^-} \equiv \int_\pi^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \psi(\vec{\Omega}) \quad (3.1.4.30)$$

$$J_1^x \equiv \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sin \theta \cos \varphi \psi(\vec{\Omega}), \quad J_1^y \equiv \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sin \theta \sin \varphi \psi(\vec{\Omega}) \quad (3.1.4.31)$$

MOC での表面平均部分中性子束の計算については Appendix B を参照されたい。なお、z 軸方向の 3 次モーメントは次式に示すように 0 となり、(3.1.4.26)式の仮定が妥当であることを支持している。

$$J_3^z = -\frac{8}{7}(\phi_0^{z+} - \phi_0^{z-} - \frac{3}{2}J_1^z) = 0 \quad (3.1.4.32)$$

なお、(3.1.4.32)式が成り立つのは、2次元体系では角度中性子束が z+方向と z-方向で対象であることより $\phi_0^{z+} = \phi_0^{z-}$ 及び $J_1^z = 0$ が成り立つためである。

以上が SP3 方程式における角度モーメントと部分角度モーメントの関係である。

3.2. Individual Discontinuity Factor

本節では、本論文で提案する SP3 方程式における DF の 1 つである Individual Discontinuity Factor (DF)について述べる。拡散方程式において、DF は領域表面中性子流 J_1 を保存するように定義され、中性子束 ϕ_0 に対して適用される。Individual DF は領域表面中性子流 J_1 と 3 次モーメント J_3 を保存するように定義され、中性子束 ϕ_0 と(3.1.2.14)式で定義される $\Phi = \phi_0 + 2\phi_2$ に対して適用される。

3.2.1 節では Individual DF の理論、3.2.2 節ではその計算手順について述べる。最後に、3.2.3 節では均質計算への Individual DF の適用方法を説明する。

3.2.1. 理論

本項では Individual Discontinuity Factor (DF)の理論について説明する。なお、基本的な考え方は 2.2.1 節で述べた拡散方程式における DF と同じである。

Figure 3.2.1.1 に示す 2次元体系の Region (i, j)に着目する。まず、Region (i, j)での領域平均反応率を非均質計算と均質計算で一致させるにはどうすればよいか考える。なお、非均質計算では輸送方程式に基づく計算手法(MOC、 S_N 法など)、均質計算では SP3 方程式に基づく計算手法を用いることを想定している。

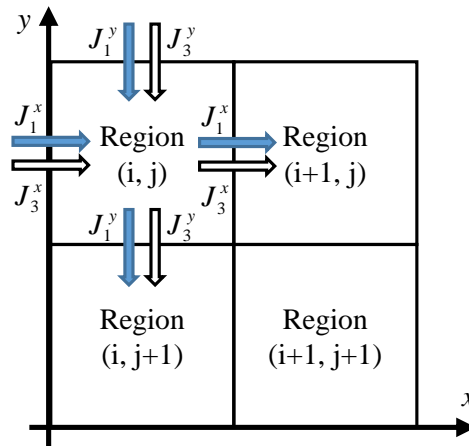


Figure 3.2.1.1 xy 平面 2次元体系

非均質輸送方程式を Region (i, j)で空間積分し、さらに全立体角で積分することで次式を得る。

$$\frac{J_{1,i+1/2,j}^{het,x} - J_{1,i-1/2,j}^{het,x}}{\Delta x_i} + \frac{J_{1,i,j+1/2}^{het,y} - J_{1,i,j-1/2}^{het,y}}{\Delta y_j} + \bar{\Sigma}_r \bar{\phi}_0^{het} = \bar{Q}_0^{het} \quad (3.2.1.1)$$

ただし、 $\bar{\Sigma}$ は全中性子束重みの均質化断面積であり、それ以外のバーは領域平均の値であることを示

している。*het* は非均質計算の値であることを示している。また、添字 $i+1/2$ は **Region** (i, j) と $(i+1, j)$ の境界表面を表しており、これは $i-1/2, j+1/2, j-1/2$ も同じである。均質化断面積を用いて均質体系の SP3 方程式は次式で表される。

$$\nabla \cdot \vec{J}_1 + \bar{\Sigma}_r \phi_0 = Q_0 \quad (3.2.1.2)$$

$$\frac{3}{5} \nabla \cdot \vec{J}_3 + \bar{\Sigma}_r \phi_2 = \frac{2}{5} (\bar{\Sigma}_r \phi_0 - Q_0) \quad (3.2.1.3)$$

(3.2.1.2)式と(3.2.1.3)式を **Region** (i, j) で空間積分することで次式を得る。

$$\frac{J_{1,i+1/2,j}^{hom,x} - J_{1,i-1/2,j}^{hom,x}}{\Delta x_i} + \frac{J_{1,i,j+1/2}^{hom,y} - J_{1,i,j-1/2}^{hom,y}}{\Delta y_j} + \bar{\Sigma}_r \bar{\phi}_0^{hom} = \bar{Q}_0^{hom} \quad (3.2.1.4)$$

$$\frac{3}{5} \frac{J_{3,i+1/2,j}^{hom,x} - J_{3,i-1/2,j}^{hom,x}}{\Delta x_i} + \frac{3}{5} \frac{J_{3,i,j+1/2}^{hom,y} - J_{3,i,j-1/2}^{hom,y}}{\Delta y_j} + \bar{\Sigma}_r \bar{\phi}_2^{hom} = \frac{2}{5} (\bar{\Sigma}_r \bar{\phi}_0^{hom} - \bar{Q}_0^{hom}) \quad (3.2.1.5)$$

ただし、*hom* は均質計算の値であることを示している。(3.2.1.1)式と(3.2.1.4)式を見比べると、次式に示すように領域表面中性子流 J_1 が非均質計算と均質計算で等しければ、均質計算で非均質計算の領域平均反応率を再現できることがわかる。

$$J_{1,i\pm 1/2,j}^{hom,x} = J_{1,i\pm 1/2,j}^{het,x} \quad (3.2.1.6)$$

$$J_{1,i\pm 1/2,j}^{hom,y} = J_{1,i\pm 1/2,j}^{het,y} \quad (3.2.1.7)$$

以上で述べたように、領域平均反応率を再現するだけならば(3.2.1.6)式と(3.2.1.7)式だけで十分である。実際、拡散方程式では(3.2.1.6)式と(3.2.1.7)式のみを用いて定義した **DF** で反応率を再現している。しかし、**SP3** 方程式においては 3 次モーメント J_3 も保存することで非均質計算の結果をより均質計算に反映することができ、単一集合体体系で計算された **DF** を炉心体系に適用した時の計算精度が高まると期待できる。そこで、**Individual DF** の概念では、(3.2.1.6)式と(3.2.1.7)式に加えて領域表面 3 次モーメント J_3 が非均質計算と均質計算で等しいという次式の条件を用いる。

$$J_{3,i\pm 1/2,j}^{hom,x} = J_{3,i\pm 1/2,j}^{het,x} \quad (3.2.1.8)$$

$$J_{3,i\pm 1/2,j}^{hom,y} = J_{3,i\pm 1/2,j}^{het,y} \quad (3.2.1.9)$$

以上の領域表面 J_1 と J_3 が非均質計算と均質計算で等しいという(3.2.1.6)-(3.2.1.9)式を用いて **Individual DF** を計算する方法について説明する。まず、非均質体系の領域表面 J_3 を、**MOC** 等の計算で直接求めるのではなく、**SP3** 方程式での 3 次モーメントと部分中性子束の関係式(3.1.4.27)式及び(3.1.4.28)式を用いて次式で近似的に計算する。

$$J_{3,i\pm 1/2,j}^{het,x} = -\frac{8}{7} \left(\phi_{0,i\pm 1/2,j}^{x+} - \phi_{0,i\pm 1/2,j}^{x-} - \frac{3}{2} J_{1,i\pm 1/2,j}^x \right) \quad (3.2.1.10)$$

$$J_{3,i\pm 1/2,j}^{het,y} = -\frac{8}{7} \left(\phi_{0,i\pm 1/2,j}^{y+} - \phi_{0,i\pm 1/2,j}^{y-} - \frac{3}{2} J_{1,i\pm 1/2,j}^y \right) \quad (3.2.1.11)$$

このように計算するのは、非均質体系での 3 次モーメントの計算を簡略化するためである。次に、2.2.1

節の拡散方程式の場合と同様に、Region (i, j)で領域表面 J_1 と J_3 が保存されるという境界条件(3.2.1.6)-(3.2.1.9)式を与えた Region (i, j)単体の均質計算を考える。Figure 3.2.1.2 にこの均質計算の概念図を示す。この均質計算では、領域表面で領域表面 J_1 と J_3 を与え、これを境界条件として領域内の ϕ_0 及び ϕ_2 を計算する。

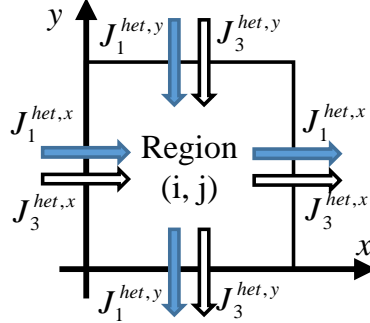


Figure 3.2.1.2 境界条件を与えられた Region (i, j)単体の均質体系

この均質計算を解くことで、非均質計算の反応率を再現するときの領域表面中性子束 $\phi_0^{hom,s}$ と 2次モーメント $\phi_2^{hom,s}$ を計算できる。非均質体系の領域表面中性子束 $\phi_0^{het,s}$ 及び $\phi_2^{het,s}$ と、この $\phi_0^{hom,s}$ 及び $\phi_2^{hom,s}$ を用いて ϕ_0 と $\Phi = \phi_0 + 2\phi_2$ に対する DF をそれぞれ(3.2.1.12)式及び(3.2.1.13)式で各領域表面において計算する。

$$f_0 \equiv \frac{\phi_0^{het,s}}{\phi_0^{hom,s}} \quad (3.2.1.12)$$

$$f_F \equiv \frac{\Phi^{het,s}}{\Phi^{hom,s}} = \frac{\phi_0^{het,s} + 2\phi_2^{het,s}}{\phi_0^{hom,s} + 2\phi_2^{hom,s}} \quad (3.2.1.13)$$

なお、非均質体系の領域表面 $\phi_2^{het,s}$ を、MOC 等の計算で直接求めるのではなく、SP3 方程式における 2次モーメントと部分中性子流の関係(3.1.4.15)式を用いて次式で近似的に計算する。

$$\phi_2^{het,s} = -\frac{16}{5} \left(2J_1^{het,z+} - \frac{1}{2}\phi_0^{het,s} \right) \quad (3.2.1.14)$$

このように計算するのは、非均質体系での 3次モーメントの計算を簡略化するためである。以上のように計算される SP3 方程式の DF を Individual DF と呼ぶ。Individual DF では、 ϕ_0 と Φ に別々の DF が与えられる。 ϕ_2 に対して直接 DF を与えるのではなく Φ に対して DF を与える形にした理由は、 $\phi_2^{hom,s}$ が 0 付近の値を取るとき DF が非常に大きな値となり、計算が不安定になるためである。実際に ϕ_2 に対して直接 DF を与え計算を行ったみたが、ほとんどの計算体系で計算が発散してしまい収束しなかった。

以上が Individual DF の理論である。なお、上記の議論では領域平均反応率が再現されるように DF を定義したが、領域平均反応率が再現されるため増倍率や領域平均 ϕ_0 も保存される。

3.2.2. 計算手順

本項では Individual DF の計算手順について説明する。

有限差分 1 メッシュ

Individual DF の計算手順についてイメージを掴むため、次に示す簡単な条件での計算手順について説明する。

- 2次元体系(Figure 3.2.1.1)、固有値問題
- 均質計算を有限差分法で行う。
- 均質化領域(Region(i, j))を 1 メッシュとする。

Region(i, j)の領域表面に対する DF を計算することを考える。有限差分法を用いるため、(i+1/2, j)表面について次式が成り立つ。

$$J_{1,i+1/2,j}^{hom,x} = -\bar{D}_{1,i,j}^{FD}(\phi_{0,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} - \bar{\phi}_{0,i,j}^{hom}) - 2\bar{D}_{1,i,j}^{FD}(\phi_{2,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} - \bar{\phi}_{2,i,j}^{hom}) \quad (3.2.2.1)$$

$$J_{3,i+1/2,j}^{hom,x} = -\bar{D}_{3,i,j}^{FD}(\phi_{2,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} - \bar{\phi}_{2,i,j}^{hom}) \quad (3.2.2.2)$$

ただし、上付き添字 $s(i, j)$ は Region(i, j)の表面での値であることを示している。ここで、領域表面 J_1 と J_3 が保存されるという(3.2.1.6)-(3.2.1.9)式を境界条件として与えられた均質計算を考える。上で述べたように、このとき非均質計算の領域平均反応率及び ϕ_0 が再現される。よって、(3.2.2.1)式と(3.2.2.2)式は次式のように表される。

$$J_{1,i+1/2,j}^{het,x} = -\bar{D}_{1,i,j}^{FD}(\phi_{0,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} - \bar{\phi}_{0,i,j}^{het}) - 2\bar{D}_{1,i,j}^{FD}(\phi_{2,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} - \bar{\phi}_{2,i,j}^{het}) \quad (3.2.2.3)$$

$$J_{3,i+1/2,j}^{het,x} = -\bar{D}_{3,i,j}^{FD}(\phi_{2,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} - \bar{\phi}_{2,i,j}^{het}) \quad (3.2.2.4)$$

ただし、 $\bar{\phi}_{2,i,j}^{het}$ は Region(i, j)内の 2 次モーメントのバランス式である次式より計算される。

$$\frac{3}{5} \frac{J_{3,i+1/2,j}^{het,x} - J_{3,i-1/2,j}^{het,x}}{\Delta x_i} + \frac{3}{5} \frac{J_{3,i,j+1/2}^{het,y} - J_{3,i,j-1/2}^{het,y}}{\Delta y_j} + \bar{\Sigma}_i \bar{\phi}_0^{het} = \frac{2}{5} (\bar{\Sigma}_r \bar{\phi}_0^{het} - \bar{Q}_0^{het}) \quad (3.2.2.5)$$

(3.2.2.3)式と(3.2.2.4)式より、領域表面 ϕ_0 と ϕ_2 は次式で求められる。

$$\phi_{0,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} = \bar{\phi}_{0,i,j}^{het} - \frac{J_{1,i+1/2,j}^{het,x}}{\bar{D}_{1,i,j}^{FD}} + \frac{2J_{3,i+1/2,j}^{het,x}}{\bar{D}_{3,i,j}^{FD}} \quad (3.2.2.6)$$

$$\phi_{2,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} = \bar{\phi}_{2,i,j}^{het} - \frac{J_{3,i+1/2,j}^{het,x}}{\bar{D}_{3,i,j}^{FD}} \quad (3.2.2.7)$$

他の表面についても以上と同様に領域表面 ϕ_0 と ϕ_2 を求められる。

以上の手順で求められた均質計算の領域表面 ϕ_0 及び ϕ_2 と非均質計算のそれを用いて、各領域表面で(3.2.1.12)式及び(3.2.1.13)式により ϕ_0 と Φ に対する DF を計算する。

束縛条件を与えられた均質計算(ノード法)

上記の有限差分 1 メッシュの場合は簡単な条件設定であったため、領域表面 J_1 と J_3 が保存されるという境界条件を与えられた均質 SP3 計算を解析的に解き、領域表面 ϕ_0 及び ϕ_2 を解析的に計算する

ことができた。さて、均質 SP3 計算にはノード法が用いられることが多い。ノード法の場合は解析的に解くことが難しいため、反復法を用いてこの均質 SP3 計算を行い、領域表面 ϕ_0 及び ϕ_2 を計算する。以下にこの反復計算の手順を示す。なお、この反復計算は 3.4 節の検証計算で Individual DF を計算する際に用いており、均質計算にノード法を使うことを想定している。

- (5) 領域表面の ϕ_0 及び ϕ_2 を計算する均質化領域において、中性子源と中性子束の空間分布が未知であるため、これらの空間分布に初期値を与える。
- (6) 非均質体系の領域表面 J_1 と J_3 を境界条件とした 1 ノード問題を解く。SP3 方程式の 1 ノード問題の解き方は Appendix A を参考にされたい。
- (7) Step (2)の結果より、領域表面 ϕ_0 及び ϕ_2 、ならびに ϕ_0 及び ϕ_2 の空間分布を計算する。さらに、得られた ϕ_0 空間分布から中性子源の空間分布を計算する。なお、均質化領域内での ϕ_0 及び ϕ_2 の空間積分値が非均質計算のそれと一致するように ϕ_0 及び ϕ_2 を規格化することで計算が安定する。
- (8) Step (2)-(3)を領域表面 ϕ_0 及び ϕ_2 が収束するまで繰り返す。

Individual DF の全体的な計算手順

Individual DF の全体的な計算手順を以下に示す。

- (1) 非均質輸送計算を行う。
- (2) Step (1)の結果より均質化断面積、均質領域表面の部分中性子束及び部分中性子流を得る。MOC での領域表面部分中性子束及び部分中性子流の計算は Appendix A を参照されたい。得られた部分中性子束及び部分中性子流より、領域表面角度モーメント ϕ_0 、 J_1 、 ϕ_2 及び J_3 を計算する。また、得られた ϕ_0 と ϕ_2 より領域表面 $\Phi = \phi_0 + 2\phi_2$ を計算する。 ϕ_2 と J_3 の計算には(3.2.1.14)式、(3.2.1.10)式及び(3.2.1.11)式を用いる。
- (3) Step (2)で得られた非均質体系の領域表面 J_1 と J_3 を用いて、上記の領域表面 J_1 と J_3 が保存されるという境界条件を与えられた均質 SP3 計算を行う。
- (4) Step (3)の結果より、均質体系における均質化領域表面 ϕ_0 及び ϕ_2 を計算する。また、得られた ϕ_0 と ϕ_2 より均質化領域表面 Φ を計算する。
- (5) Step (2)と(4)で得た均質化領域表面 ϕ_0 と Φ の比をとることで ϕ_0 と Φ の DF をそれぞれ計算する。

以上が Individual DF の計算手順である。

3.2.3. 均質計算への適用方法

本項では均質 SP3 計算への Individual DF の適用方法について述べる。Individual DF を適用する場合としない場合では、領域表面での角度モーメントの連続性に関する式が変わる。例えば、領域表面 $(i+1/2, j)$ について、Individual DF を適用しない場合、領域表面で角度モーメントが連続であるという次式の関係式を与える。

$$\phi_{0,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} = \phi_{0,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j)} \quad (3.2.3.1)$$

$$J_{1,i+1/2,j}^{hom,s(i,j),x} = J_{1,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j),x} \quad (3.2.3.2)$$

$$\phi_{2,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} = \phi_{2,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j)} \quad (3.2.3.3)$$

$$J_{3,i+1/2,j}^{hom,s(i,j),x} = J_{3,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j),x} \quad (3.2.3.4)$$

一方、Individual DF を適用する場合には、偶数次モーメントが不連続で、奇数次モーメントが連続であるという次式の関係式を与えればよい。

$$f_{0,i+1/2,j}^{s(i,j)} \phi_{0,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} = f_{0,i+1/2,j}^{s(i+1,j)} \phi_{0,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j)} \quad (3.2.3.5)$$

$$J_{1,i+1/2,j}^{hom,s(i,j),x} = J_{1,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j),x} \quad (3.2.3.6)$$

$$f_{F,i+1/2,j}^{s(i,j)} \Phi_{i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} = f_{F,i+1/2,j}^{s(i+1,j)} \Phi_{i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j)} \quad (3.2.3.7)$$

$$J_{3,i+1/2,j}^{hom,s(i,j),x} = J_{3,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j),x} \quad (3.2.3.8)$$

さて、(3.2.3.5)-(3.2.3.8)式を具体的にどのように計算に組み込むかについて説明する。ここでは、3.4節の検証計算で用いた有限差分タイプのノード法の形式を例として挙げる。(3.2.3.5)-(3.2.3.8)式では偶数次モーメントの連続性の条件として、 ϕ_0 と Φ の式が与えられている。しかし、有限差分タイプのノード法では、連続性の条件として ϕ_2 と Φ の式を与える。そこで、(3.2.3.5)式から ϕ_2 の連続性に関する式を導くことを考える。これには以下の比形式と補助項形式の2つを考えることができる。

比形式

まず比形式の連続性の式について説明する。(3.2.3.5)式から(3.2.3.3)式のような形式の ϕ_2 の連続性に関する式を導くことを考える。(3.2.3.5)式に仮想的な ϕ_2 の DF f'_2 を導入することで次式を得る。

$$f'_{2,i+1/2,j}{}^{s(i,j)} \phi_{2,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} = f'_{2,i+1/2,j}{}^{s(i+1,j)} \phi_{2,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j)} \quad (3.2.3.9)$$

$$f'_{2,i+1/2,j}{}^{s(i,j)} = \frac{f_{0,i+1/2,j}^{s(i,j)} \phi_{0,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)}}{\phi_{2,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)}} \quad (3.2.3.10)$$

(3.2.3.9)式を比形式の ϕ_2 の連続性に関する式と呼ぶ。比形式を用いる場合、反復計算中で f'_2 を適宜更新する。(3.2.3.10)式よりわかるように、 f'_2 の計算式には ϕ_2 の割り算が含まれるため、 ϕ_2 が 0 に近い値をとるとき計算が数値的に不安定になる可能性がある。

補助項形式

次に補助項形式の連続性の式について説明する。(3.1.2.14)式の関係より、(3.2.3.5)式は次式のように変形できる。

$$f_{0,i+1/2,j}^{s(i,j)} \phi_{2,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} = f_{0,i+1/2,j}^{s(i+1,j)} \phi_{2,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j)} + R_{i+1/2,j} \quad (3.2.3.11)$$

$$R_{i+1/2,j} = -\frac{1}{2} \left(f_{0,i+1/2,j}^{s(i+1,j)} \Phi_{i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j)} - f_{0,i+1/2,j}^{s(i,j)} \Phi_{i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} \right) \quad (3.2.3.12)$$

(3.2.3.11)式を補助項形式の ϕ_2 の連続性に関する式と呼ぶ。補助項形式は、比形式に補助的な項が付け加わった形をしている。補助項形式を用いる場合、補助項 R を反復計算中で適宜更新する。補助項形式では数値的不安定性は発生しない。

以上が比形式と補助項形式の説明である。比形式では数値的不安定性が発生するため、補助項形式を用いることをおすすめする。3.4 節の検証計算で用いている計算コードは補助項形式に基づいている。

3.3. Unitary Discontinuity Factor

本節では、本論文で提案する SP3 方程式における DF の 1 つである Unitary Discontinuity Factor (DF) について述べる。拡散方程式において、DF は領域表面中性子流 J_1 を保存するように定義され、中性子束 ϕ_0 に対して適用される。Unitary DF は次の条件を満たすように定義され、中性子束 ϕ_0 と (3.1.2.14) 式で定義される $\Phi = \phi_0 + 2\phi_2$ に対して適用される。

- 領域表面中性子流 J_1 を保存する。
- 体系の境界表面以外の領域表面で ϕ_0 に対する DF と Φ に対する DF が等しく、3 次モーメント J_3 が連続である。
- DF を計算する体系の境界表面(単一集合体体系であれば集合体表面)においては ϕ_0 と Φ でそれぞれ別々に DF を与える。

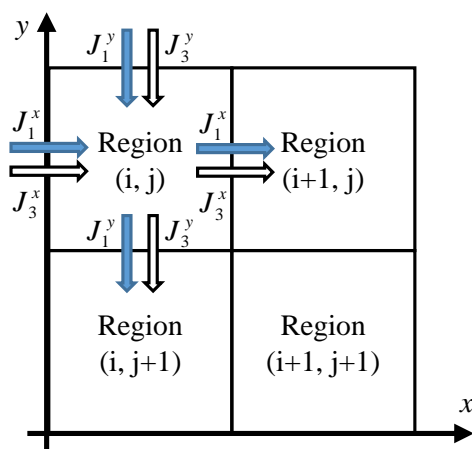
このような定義としたのは、 ϕ_0 と Φ の DF が共通であれば、 ϕ_0 と Φ に別々の DF を与える方法よりも計算に要するメモリ量を低減できるためである。

3.3.1 節では Unitary DF の理論、3.3.2 節ではその計算手順について述べる。最後に、3.3.3 節では均質計算への Unitary DF の適用方法を説明する。

3.3.1. 理論

本項では Unitary Discontinuity Factor (DF) の理論について説明する。

Figure 3.2.1.1 に示す 2 次元体系の Region (i, j) に着目する。



(再掲) Figure 3.2.1.1 xy 平面 2 次元体系

Region (i, j)での領域平均反応率を非均質計算と均質 SP3 計算で一致するためには、3.2.1 節の Individual

DF の理論で述べたように、領域表面中性子流 J_1 が非均質計算と均質計算で等しければよい。

$$J_{1,i\pm 1/2,j}^{hom,x} = J_{1,i\pm 1/2,j}^{het,x} \quad (\text{再掲}) \quad (3.2.1.6)$$

$$J_{1,i\pm 1/2,j}^{hom,y} = J_{1,i\pm 1/2,j}^{het,y} \quad (\text{再掲}) \quad (3.2.1.7)$$

Individual DF の理論では、(3.2.1.6)式及び(3.2.1.7)式に加えて領域表面 3 次モーメント J_3 が保存されるという次式の条件を考えていた。

$$J_{3,i\pm 1/2,j}^{hom,x} = J_{3,i\pm 1/2,j}^{het,x} \quad (\text{再掲}) \quad (3.2.1.8)$$

$$J_{3,i\pm 1/2,j}^{hom,y} = J_{3,i\pm 1/2,j}^{het,y} \quad (\text{再掲}) \quad (3.2.1.9)$$

Unitary DF の理論では、(3.2.1.6)式及び(3.2.1.7)式に加えて、領域表面で ϕ_0 と Φ に対する DF が等しいという(3.3.1.1)式及び(3.3.1.2)式の条件と領域表面で 3 次モーメント J_3 連続という(3.3.1.3)式の条件を考える。

$$f_{u,i+1/2,j}^{s(i,j)} \phi_{0,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} = f_{u,i+1/2,j}^{s(i+1,j)} \phi_{0,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j)} \quad (3.3.1.1)$$

$$f_{u,i+1/2,j}^{s(i,j)} \Phi_{i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} = f_{u,i+1/2,j}^{s(i+1,j)} \Phi_{i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j)} \quad (3.3.1.2)$$

$$J_{3,i+1/2,j}^{hom,s(i,j),x} = J_{3,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j),x} \quad (3.3.1.3)$$

なお、この両式は表面 $i+1/2$ に対するものであるが、他の表面についても同様に考えることができる。(3.3.1.1)式と(3.3.1.2)式の条件を次のように表すことができる。

$$\frac{\phi_{0,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j)}}{\phi_{0,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)}} = \frac{\Phi_{i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j)}}{\Phi_{i+1/2,j}^{hom,s(i,j)}}, \quad \frac{\phi_{0,i-1/2,j}^{hom,s(i,j)}}{\phi_{0,i-1/2,j}^{hom,s(i-1,j)}} = \frac{\Phi_{i-1/2,j}^{hom,s(i,j)}}{\Phi_{i-1/2,j}^{hom,s(i-1,j)}} \quad (3.3.1.4)$$

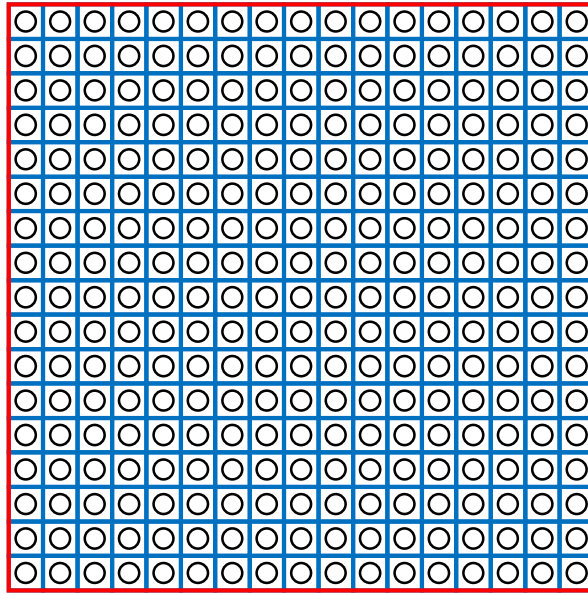
$$\frac{\phi_{0,i,j+1/2}^{hom,s(i,j+1)}}{\phi_{0,i,j+1/2}^{hom,s(i,j)}} = \frac{\Phi_{i,j+1/2}^{hom,s(i,j+1)}}{\Phi_{i,j+1/2}^{hom,s(i,j)}}, \quad \frac{\phi_{0,i,j-1/2}^{hom,s(i,j)}}{\phi_{0,i,j-1/2}^{hom,s(i,j-1)}} = \frac{\Phi_{i,j-1/2}^{hom,s(i,j)}}{\Phi_{i,j-1/2}^{hom,s(i,j-1)}} \quad (3.3.1.5)$$

結局、Unitary DF を計算する際には、領域両面で中性子流が保存されるという条件(3.2.1.6)式及び(3.2.1.7)式、領域表面で ϕ_0 と Φ に対する DF が等しいという条件(3.3.1.4)式及び(3.3.1.5)式、領域表面で 3 次モーメントが連続であるという条件(3.3.1.3)式を与える。ただし、DF を計算する体系の境界表面においては境界条件(完全反射境界条件など)を満足させるため、次式に示す中性子流と 3 次モーメントが保存されるという条件を与える。

$$J_1^{hom,boundary,s,x} = J_1^{het,boundary,s,x}, \quad J_1^{hom,boundary,s,y} = J_1^{het,boundary,s,y} \quad (3.3.1.6)$$

$$J_3^{hom,boundary,s,x} = J_3^{het,boundary,s,x}, \quad J_3^{hom,boundary,s,y} = J_3^{het,boundary,s,y} \quad (3.3.1.7)$$

Figure 3.3.1.1 に単一集合体体系の場合にどの表面にどの条件を与えるかの例を挙げておく。



体系境界面以外の領域表面

束縛条件：

- J_1 が保存される
- ϕ_0 と Φ のDFが等しい
- J_3 が連続

DF：

- ϕ_0 と Φ で共通

体系境界面

束縛条件：

- J_1 が保存される
- J_3 が保存される

DF：

- ϕ_0 と Φ で異なる

Figure 3.3.1.1 Unitary DF を計算するための均質 SP3 計算の束縛条件(単一集合体体系)

これらの条件を用いて Unitary DF を計算する方法について説明する。まず、これらの条件を束縛条件として与えた均質計算を行う。ここで注意すべきなのは、Individual DF や拡散方程式の DF の計算では均質化領域 1 つの体系に対して束縛条件を与えて均質計算を行ったが、Unitary DF の計算では(3.3.1.4)式及び(3.3.1.5)式を考慮するためノード単位でなく体系全体で均質計算を行う。この均質計算を解くことで、非均質計算の反応率を再現するときの領域表面中性子束 $\phi_0^{hom,s}$ と 2 次モーメント $\phi_2^{hom,s}$ を計算できる。得られた領域表面中性子束 $\phi_0^{hom,s}$ を用いて ϕ_0 と $\Phi = \phi_0 + 2\phi_2$ 共通の DF を次式で計算する。

$$f_u \equiv \frac{\phi_0^{het,s}}{\phi_0^{hom,s}} \quad (3.3.1.8)$$

体系境界表面については ϕ_0 と Φ に対する DF が等しいという条件(3.3.1.4)式及び(3.3.1.5)式を与えていないため、次式に示すように ϕ_0 と Φ に対する DF をそれぞれ計算する。

$$f_0^{boundary,s} \equiv \frac{\phi_0^{het,boundary,s}}{\phi_0^{hom,boundary,s}} \quad (3.3.1.9)$$

$$f_F^{boundary,s} \equiv \frac{\Phi^{het,boundary,s}}{\Phi^{hom,boundary,s}} = \frac{\phi_0^{het,boundary,s} + 2\phi_2^{het,boundary,s}}{\phi_0^{hom,boundary,s} + 2\phi_2^{hom,boundary,s}} \quad (3.3.1.10)$$

なお、非均質体系の領域表面 $\phi_2^{hom,s}$ は 2 次モーメントと部分中性子流の関係(3.1.4.15)式を用いて、Individual DF の理論と同様に次式で計算される。

$$\phi_2^{het,s} = -\frac{16}{5} \left(2J_1^{het,z+} - \frac{1}{2}\phi_0^{het,s} \right) \quad (\text{再掲}) (3.2.1.14)$$

以上のように計算される SP3 方程式の DF を Unitary DF と呼ぶ。Unitary DF では体系境界表面において ϕ_0 と Φ に対する DF が与えられる。 ϕ_2 に対して直接 DF を与えないのは、 $\phi_2^{hom,s}$ が 0 付近の値を取るとき DF が非常に大きな値となり、計算が不安定になるためである。

以上が Unitary DF の理論である。Unitary DF は、体系の境界表面以外の領域表面で ϕ_0 と Φ に共通の DF を与えることができるため、 ϕ_0 と Φ に別々の DF を与える方法よりも計算に要するメモリ量を低減できる。なお、上記の議論では領域平均反応率が再現されるように DF を定義したが、領域平均反応率が再現されるため増倍率や領域平均 ϕ_0 も保存される。

3.3.2. 計算手順

本項では Unitary DF の計算手順について説明する。

有限差分 2×1 メッシュ

Unitary DF の計算手順についてイメージを掴むため、次に示す簡単な条件での計算手順について説明する。

- 1次元体系(Figure 3.3.2.1)、固有値問題
- 均質計算を有限差分法で行う。
- 均質化領域(Region(1)、(2))をそれぞれ1メッシュとする。

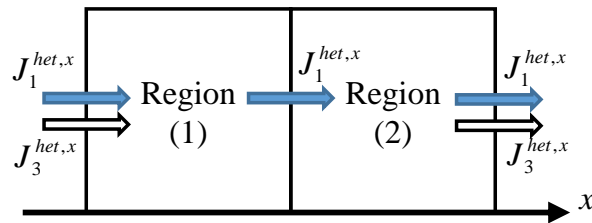


Figure 3.3.2.1 Unitary DF を計算する 1次元体系

各均質化領域のバランス式は次式で表される。

$$\frac{J_{1,i+1/2}^{hom,x} - J_{1,i-1/2}^{hom,x}}{\Delta x_i} + \bar{\Sigma}_{r,i} \bar{\phi}_{0,i}^{hom} = \bar{Q}_{0,i}^{hom} \quad (3.3.2.1)$$

$$\frac{3}{5} \frac{J_{3,i+1/2}^{hom,x} - J_{3,i-1/2}^{hom,x}}{\Delta x_i} + \bar{\Sigma}_{t,i} \bar{\phi}_{2,i}^{hom} = \frac{2}{5} (\bar{\Sigma}_{r,i} \bar{\phi}_{0,i}^{hom} - \bar{Q}_{0,i}^{hom}) \quad (3.3.2.2)$$

3.3.1 節で述べた Unitary DF を計算するときの条件である次の 4 つの束縛条件を与えることを考える。

- 領域表面で中性子流が保存されるという条件(3.2.1.6)式
- 領域表面で ϕ_0 と Φ に対する DF が等しいという条件(3.3.1.4)式
- 領域表面で 3 次モーメントが連続であるという条件(3.3.1.3)式
- 体系境界面においては中性子流と 3 次モーメントが保存されるという条件(3.3.1.6)式

これらの束縛条件を与えたとき、領域平均反応率が再現されるため、均質計算の領域バランスを次式で表すことができる。

$$\frac{J_{1,3/2}^{het,x} - J_{1,1/2}^{het,x}}{\Delta x_1} + \bar{\Sigma}_{r,1} \bar{\phi}_{0,1}^{het} = \bar{Q}_{0,1}^{het} \quad (3.3.2.3)$$

$$\frac{3}{5} \frac{J_{3,3/2}^{hom,x} - J_{3,1/2}^{het,x}}{\Delta x_1} + \bar{\Sigma}_{t,1} \bar{\phi}_{2,1}^{hom} = \frac{2}{5} (\bar{\Sigma}_{r,1} \bar{\phi}_{0,1}^{het} - \bar{Q}_{0,1}^{het}) \quad (3.3.2.4)$$

$$\frac{J_{1,5/2}^{het,x} - J_{1,3/2}^{het,x}}{\Delta x_2} + \bar{\Sigma}_{r,2} \bar{\phi}_{0,2}^{het} = \bar{Q}_{0,2}^{het} \quad (3.3.2.5)$$

$$\frac{3}{5} \frac{J_{3,5/2}^{het,x} - J_{3,3/2}^{hom,x}}{\Delta x_2} + \bar{\Sigma}_{t,2} \bar{\phi}_{2,2}^{hom} = \frac{2}{5} (\bar{\Sigma}_{r,2} \bar{\phi}_{0,2}^{het} - \bar{Q}_{0,2}^{het}) \quad (3.3.2.6)$$

(3.3.2.3)-(3.3.2.9)式の未知数である $\bar{\phi}_{2,1}^{hom}$ 、 $\bar{\phi}_{2,2}^{hom}$ 及び $J_{3,3/2}^{hom,x}$ を求めることを考える。ここで、領域表面 3/2(領域 1, 2 の間)において Unitary DF を用いて中性子流と 3 次モーメントは次式で表される。

$$J_{1,3/2}^{het,x} = - \frac{(f_{u,3/2}^{(2)} \bar{\phi}_{0,2}^{hom} - f_{u,3/2}^{(1)} \bar{\phi}_{0,1}^{hom}) + 2(f_{u,3/2}^{(2)} \bar{\phi}_{2,2}^{hom} - f_{u,3/2}^{(1)} \bar{\phi}_{2,1}^{hom})}{\frac{\Delta x_2}{D_{3,2}} f_{u,3/2}^{(2)} + \frac{\Delta x_1}{D_{3,1}} f_{u,3/2}^{(1)}} \quad (3.3.2.7)$$

$$J_{3,3/2}^{hom,x} = - \frac{f_{u,3/2}^{(2)} \bar{\phi}_{2,2}^{hom} - f_{u,3/2}^{(1)} \bar{\phi}_{2,1}^{hom}}{\frac{\Delta x_2}{D_{3,2}} f_{u,3/2}^{(2)} + \frac{\Delta x_1}{D_{3,1}} f_{u,3/2}^{(1)}} \quad (3.3.2.8)$$

なお、 $f_{u,3/2}^{(1)}$ 及び $f_{u,3/2}^{(2)}$ はそれぞれ領域 1 及び 2 における領域表面 3/2 に対する Unitary DF である。(3.3.2.4)式、(3.3.2.6)-(3.3.2.8)式より、未知数である $\bar{\phi}_{2,1}^{hom}$ 、 $\bar{\phi}_{2,2}^{hom}$ 及び Unitary DF の比 $f_{u,3/2}^{(2)}/f_{u,3/2}^{(1)}$ を求めることができる。また、得られた $\bar{\phi}_{2,1}^{hom}$ 及び $\bar{\phi}_{2,2}^{hom}$ を用いて(3.3.2.8)式で 3 次モーメント $J_{3,3/2}^{hom,x}$ を計算することができる。

次に、領域表面中性子束及び 2 次モーメントを求めることを考える。得られた $\bar{\phi}_{2,1}^{hom}$ 、 $\bar{\phi}_{2,2}^{hom}$ 及び $J_{3,3/2}^{hom,x}$ を用いて、有限差分の基礎式より次式で領域表面中性子束及び 2 次モーメントを計算できる。

➤ 領域表面

$$\phi_{0,i\pm 1/2}^{hom,s(i)} = \bar{\phi}_{0,i}^{het} \mp \frac{J_{1,i\pm 1/2}^{het,x}}{D_{1,i}^{FD}} \pm \frac{2J_{3,i\pm 1/2}^{hom,x}}{D_{3,i}^{FD}} \quad (3.3.2.9)$$

$$\phi_{2,i\pm 1/2}^{hom,s(i)} = \bar{\phi}_{2,i}^{hom} \mp \frac{J_{3,i\pm 1/2}^{hom,x}}{D_{3,i}^{FD}} \quad (3.3.2.10)$$

➤ 体系境界

$$\phi_{0,i\pm 1/2}^{hom,s(i)} = \bar{\phi}_{0,i}^{het} \mp \frac{J_{1,i\pm 1/2}^{het,x}}{D_{1,i}^{FD}} \pm \frac{2J_{3,i\pm 1/2}^{het,x}}{D_{3,i}^{FD}} \quad (3.3.2.11)$$

$$\phi_{2,i\pm 1/2}^{hom,s(i)} = \bar{\phi}_{2,i}^{hom} \mp \frac{J_{3,i\pm 1/2}^{het,x}}{D_{3,i}^{FD}} \quad (3.3.2.12)$$

最後に、得られた領域表面中性子束及び2次モーメントより、(3.3.1.8)-(3.3.1.10)式でDFを計算する。以上が有限差分2×1メッシュでのUnitary DFの計算手順である。

束縛条件を与えた均質計算(ノード法)

上記の有限差分2×1メッシュの場合は簡単な条件設定であったため、束縛条件を与えられた均質SP3計算を解析的に解き、領域表面 ϕ_0 及び ϕ_2 を解析的に計算することができた。実際にはもっと多数のメッシュから構成された体系において均質SP3計算を行う必要がある。また、計算方法も有限差分法ではなくノード法が用いられることが多いと考えられる。このようにメッシュ数が多いもしくはノード法を用いる場合、均質SP3計算を解析的に行うことが難しいため、反復法を用いてこの均質SP3計算を行い、領域表面 ϕ_0 及び ϕ_2 を計算する。以下にこの反復計算の手順を示す。以下にこの反復計算の手順を示す。なお、この反復計算は3.4節の検証計算でUnitary DFを計算する際に用いており、均質計算にノード法を使うことを想定している。

- (1) 均質体系において、中性子源と中性子束の空間分布が未知であるため、これらの空間分布に初期値を与える。また、Unitary DFの初期値を与える。
- (2) ある隣接する2ノードに着目する。 Φ については非均質体系の領域表面 J_1 を境界条件とした1ノード問題をそれぞれのノードについて解く。 ϕ_2 については前回の反復で得られた均質体系の領域表面 J_3 を境界条件とした2ノード問題を解く。 Φ の1ノード問題と ϕ_2 の2ノード問題を反復し、反復中に ϕ_0 、 ϕ_2 及び中性子源の空間分布を更新する。均質化領域内での ϕ_0 及び ϕ_2 の空間積分値が非均質計算のそれと一致するように ϕ_0 及び ϕ_2 を規格化すると計算が安定する。この Φ と ϕ_2 の反復についてはAppendix Aを参考にされたい。
- (3) Step(2)の結果より、領域表面 ϕ_0 及び ϕ_2 を計算する。
- (4) すべての隣接ノードについてStep(2)-(3)を繰り返す。
- (5) Step(3)で得られた均質領域表面 ϕ_0 と非均質体系の均質領域表面 ϕ_0 を用いてUnitary DFを(3.2.1.7)式で計算する。
- (6) Step(2)-(5)を領域表面 ϕ_0 及び Φ が収束するまで繰り返す。

Unitary DFの全体的な計算手順

Unitary DFの全体的な計算手順を以下に示す。

- (1) 非均質輸送計算を行う。
- (2) Step(1)の結果より均質化断面積、均質領域表面の部分中性子束及び部分中性子流を得る。得られた部分中性子束及び部分中性子流より、領域表面角度モーメント ϕ_0 、 J_1 及び ϕ_2 を計算する。また、得られた ϕ_0 と ϕ_2 より領域表面 $\Phi = \phi_0 + 2\phi_2$ を計算する。 ϕ_2 の計算には(3.2.1.14)式を用いる。
- (3) Step(2)で得られた非均質体系の領域表面 J_1 を用いて、上記の3つの束縛条件(i)領域表面 J_1 が保存される((3.2.1.6)式及び(3.2.1.7)式)、(ii)体系境界面以外の領域表面で ϕ_0 と Φ に対するDFが等しい((3.3.1.4)式及び(3.3.1.5)式)、(iii)体系境界面で領域表面 J_1 と J_3 が保存される((3.3.1.6)式及び(3.3.1.7)式)、を与えられた均質SP3計算を行う。この均質SP3計算については本項で述べた。
- (4) Step(3)の結果より、均質体系における均質化領域表面 ϕ_0 及び ϕ_2 を計算する。また、得られた ϕ_0 と ϕ_2 より均質化領域表面 Φ を計算する。
- (5) Step(2)と(4)で得た均質化領域表面 ϕ_0 を用いて体系境界以外の領域表面で ϕ_0 と Φ で共通のDF f_u

を計算する。Step (2)と(4)で得た均質化領域表面 ϕ_0 と Φ を用いて体系境界表面で ϕ_0 と Φ の DF をそれぞれ計算する。

以上が Unitary DF の計算手順である。

3.3.1. 均質計算への適用方法

本項では均質 SP3 計算への Unitary DF の適用方法について述べる。Unitary DF を適用する場合としない場合では、領域表面での角度モーメントの連続性に関する式が変わる。例えば、領域表面($i+1/2, j$)について考える。DF を適用しない場合の式は 3.2.3 節で述べた。一方、Unitary DF を適用する場合には、Individual DF と同様に偶数次モーメントが不連続で奇数次モーメントが連続であるという次式の関係式を与えればよい。

$$f_{0,i+1/2,j}^{s(i,j)} \phi_{0,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} = f_{0,i+1/2,j}^{s(i+1,j)} \phi_{0,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j)} \quad (3.3.1.1)$$

$$J_{1,i+1/2,j}^{hom,s(i,j),x} = J_{1,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j),x} \quad (3.3.1.2)$$

$$f_{F,i+1/2,j}^{s(i,j)} \Phi_{i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} = f_{F,i+1/2,j}^{s(i+1,j)} \Phi_{i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j)} \quad (3.3.1.3)$$

$$J_{3,i+1/2,j}^{hom,s(i,j),x} = J_{3,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j),x} \quad (3.3.1.4)$$

(3.2.3.5)-(3.2.3.8)式を具体的にどのように計算に組み込むかについても 3.2.3 節で述べた Individual DF の場合と同様に考えることができる。

3.4. 検証計算

本節では 3.2 節と 3.3 節でそれぞれ提案した SP3 方程式における DF である Individual DF と Unitary DF の検証を行う。検証計算体系は KAIST Benchmark Problem 2A を参考にして構成した 2次元のカラーセット体系である[21]。検証の内容を以下に示す。

- Individual DF 及び Unitary DF の理論の妥当性の検証
 - Reference の結果から計算された DF を用いた均質計算が Reference の結果を再現できるかを確認する。
- Individual DF 及び Unitary DF の pin-by-pin 均質化への適用性の検証
 - 単一集合体体系の結果から計算された DF をカラーセット体系の均質計算に用いることで均質化誤差を低減できるかを確認する。

3.4.1 項では検証計算の内容(目的、流れなど)と条件(計算体系、計算条件など)について説明する。

3.4.2 項では検証計算の結果を示し、それについての考察を行う。

3.4.1. 検証計算の内容と条件

検証計算の内容(目的、流れなど)と条件(計算体系、計算条件など)について説明する。本項の検証計算では Reference DF (Ref-DF)と Single Assembly DF (SA-DF)についての検証を行う。Ref-DF 及び SA-

DF の定義とその検証の内容及び目的は次の通りである。

• **Reference DF (Ref-DF)**

- **定義:** Ref-DF は reference とする非均質計算の結果(本検証計算ではカラーセット体系の結果)から計算された DF である。Ref-DF は近似をまったく含んでいない。
- **検証の内容及び目的:** Ref-DF を用いた均質計算は reference の非均質計算の結果を完全に再現するはずである。そこで、Ref-Individual DF と Ref-Unitary DF を用いた均質計算がこれを満たすか確認することで、Individual DF と Unitary DF の理論の妥当性を確認する。

• **Single Assembly DF (SA-DF)**

- **定義:** SA-DF は完全反射境界条件を仮定した単一集合体体系での非均質計算の結果から計算された DF である。SA-DF は reference とする体系で評価された Ref-DF の近似である。
- **検証の内容及び目的:** カラーセット体系の pin-by-pin 均質計算に SA-Individual DF と SA-Unitary DF を用いることで均質化誤差が低減されるか検証する。この結果より Individual DF と Unitary DF の pin-by-pin 均質化への適用性を評価する。

検証計算体系は KAIST Benchmark Problem 2A に記されている集合体を用いた 2 次元カラーセット体系である[21]。KAIST Benchmark Problem 2A の詳細については Ref. [21]を参照されたい。集合体の形状を Figure 3.4.1.1、セルの形状を Figure 3.4.1.2 に示す。検証を行ったカラーセット体系を Figure 3.4.1.3 に示す。エネルギー群数は 7 群で固有値問題である。断面積も KAIST Benchmark Problem 2A のものを用いる。

- Lattice: 17 X 17	- Assembly pitch: 21.42 cm
- Number of fuel pins: 264	- Pin pitch: 1.26 cm
- Number of control rod guide tubes: 24	- Active fuel length: 365.76 cm
- Number of instrumentation guide tubes: 1	

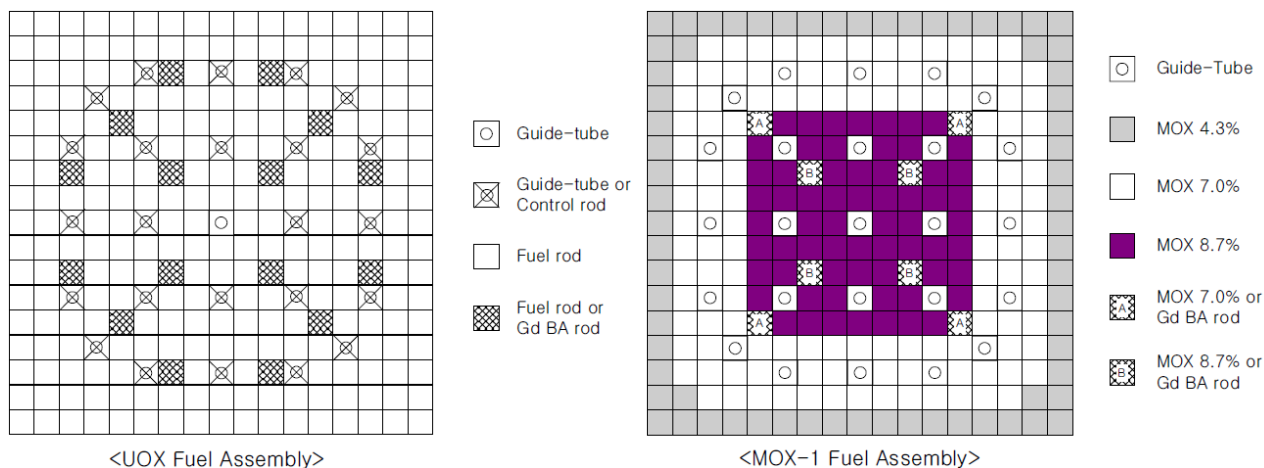


Figure 3.4.1.1 KAIST Benchmark Problem 2A の UOX 及び MOX 集合体の形状

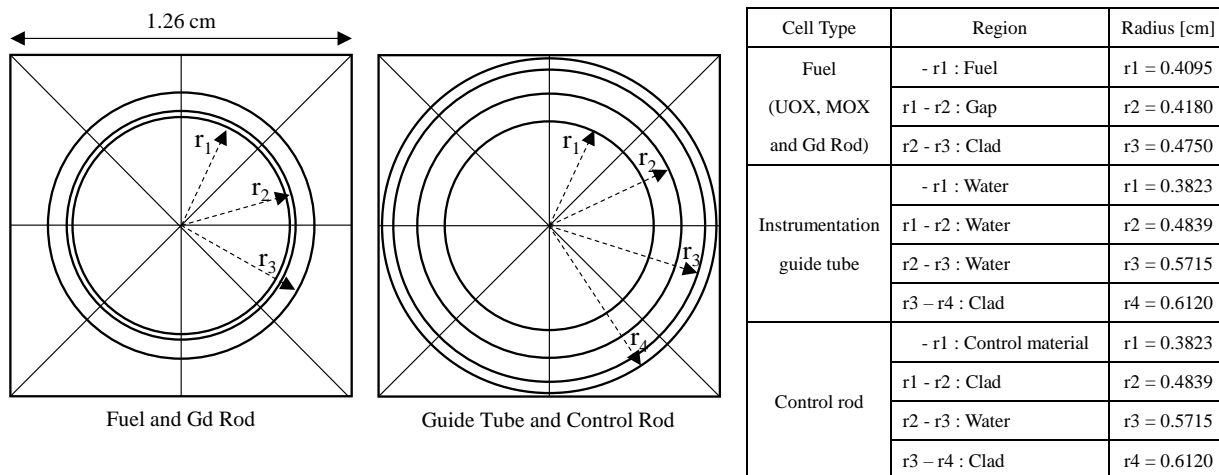


Figure 3.4.1.2 KAIST Benchmark Problem 2A のセルの形状

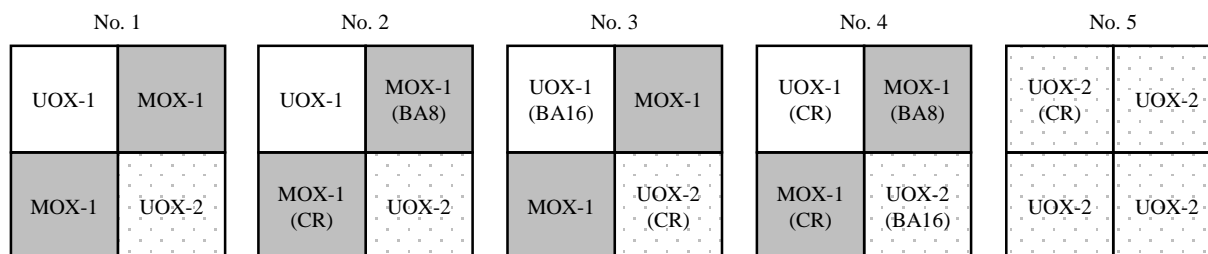


Figure 3.4.1.3 カラーセット体系(UOX-1: UO₂ 2.0 w/o fuel, UOX-2: UO₂ 3.3 w/o fuel, CR: including Control Rod, BA: including Burnable Absorber)

検証計算の手順を以下に示す。

- (1) カラーセット体系で非均質計算を行う。この結果を **reference** とする。
- (2) Step (1)の結果を用いて **pin-by-pin** 均質化を行い、均質化断面積を計算する。また、セル平均中性子束、セル表面角度モーメントを計算する。
- (3) Step (2)で得られた **reference** の均質化断面積、セル平均中性子束、セル表面角度モーメントを用いて 3.2.2 節もしくは 3.3.2 節で説明した拘束条件を与えた均質 **SP3** 計算を行う。この結果より **Ref-Individual DF** 及び **Ref-Unitary DF** をそれぞれ計算する。
- (4) カラーセット体系を構成する各々の集合体について、完全反射境界条件を仮定した単一集合体体系で非均質計算を行う。
- (5) Step (4)の結果を用いて **pin-by-pin** 均質化を行い、均質化断面積を計算する。また、セル平均中性子束、セル表面角度モーメントを計算する。
- (6) Step (5)で得られた単一集合体体系の均質化断面積、セル平均中性子束、セル表面角度モーメントを用いて 3.2.2 節もしくは 3.3.2 節で拘束条件を与えた均質 **SP3** 計算を行う。この結果より **SA-Individual DF** 及び **SA-Unitary DF** をそれぞれ計算する。
- (7) **pin-by-pin** 均質化されたカラーセット体系において **Ref-DF** または **SA-DF** を用いた均質 **SP3** 計算を行う。このとき、均質化断面積には Step (2)で得られた **reference** 均質化断面積を用いる。
- (8) Step (1)と(7)の結果(増倍率、Pin power)を比較する。

なお、Step (7)で **SA-DF** を用いた均質計算においても **reference** 均質化断面積を用いるのは、均質化断

面積そのものの誤差を排除するためである。また、均質化全断面積 $\bar{\Sigma}_t$ を用いて拡散係数 \bar{D} を $\bar{D} = 1/3\bar{\Sigma}_t$ で計算している。

比較のため均質拡散計算も行った。拡散計算についても上記と同じ手順で均質化断面積及び DF を計算した。以降では拡散方程式での DF を DifDF と呼ぶ。

非均質計算には AEGIS を用いた[22,23]。非均質計算の計算条件を Table 3.4.1.1 に示す。また、セル内の空間分割は Figure 3.4.1.2 の実線での分割に加えて次のように行った。

- Fuel and Gd Rod セルの - r1 region (Fuel) を体積が等しくなるように円環上に 10 分割
- Fuel and Gd Rod セルの Moderator region (> r3) を体積が等しくなるように円環上に 2 分割
- Guide Tube and Control Rod セルの (- r1) region (Water of Control material) を体積が等しくなるように円環上に 10 分割

Table 3.4.1.1 AEGIS の計算条件

方位角分点数	極角分点数	レイトレース方法	レイトレース幅
96	3 (TY-OPT)	Flux region Macroband	0.01 cm
keff 収束条件	中性子束収束条件	角度中性子束収束条件	
5.0e-7	1.0e-7	1.0e-5	

均質 SP3 計算には自作 SP3 多項式解析的ノード法コードを用いた。セル 1 つを 1 ノードとし、中性子源を 2 次多項式で展開する。収束判定条件は keff と中性子束のどちらについても 1.0e-8 とした。また、均質拡散計算には自作拡散多項式解析的ノード法コードを用いた。計算条件は上記の均質 SP3 計算と同じである。

3.4.2. 結果と考察

本項では検証計算の結果を示し、その考察を行う。

Reference DF

Ref-DF の検証結果と考察を示す。Ref-DF を用いたときの keff と pin power の均質化誤差を Table 3.4.2.1 と Table 3.4.2.2 に示す。なお、表中の error は相対差異を表しており、 $error = (Homo. - reference) / reference$ で計算している。Table 3.4.2.1 と Table 3.4.2.2 の結果より次のことがわかる。

- (i) Ref-Individual DF と Ref-Unitary DF を用いた均質計算と reference の非均質計算の結果の差異が 0.01% 以下と非常に小さく、非均質計算の結果を再現しているといえる。この結果より Individual DF と Unitary DF の理論の妥当性を確認できる。
- (ii) Ref-DF を用いても均質計算と非均質計算の結果が完全には一致していない。これは数値計算の丸め誤差や収束判定が原因だと考えている。

Table 3.4.2.1 keff の値と均質化誤差(Ref-DF)

Calculation	keff				
	keff error [%]				
	Color set geometry No.				
	1	2	3	4	5
reference	1.18185	1.10710	1.03992	0.97237	1.15856
SP3 with Ref-Individual DF	1.18186	1.10711	1.03993	0.97238	1.15857
SP3 with Ref-Unitary DF	1.18186	1.10711	1.03993	0.97238	1.15857
Diffusion with Ref-DifDF	1.18186	1.10711	1.03993	0.97238	1.15857

Error: Relative difference = (Homo. – reference) / reference

Table 3.4.2.2 Pin power の均質化誤差(Ref-DF)

Calculation	Pin power RMS error [%]				
	Pin power maximum error [%]				
	Color set geometry No.				
	1	2	3	4	5
SP3 with Ref-Individual DF	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
SP3 with Ref-Unitary DF	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
Diffusion with Ref-DifDF	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Pin power error: (Homo. – reference) / reference

RMS: Root mean square

Single assembly DF

SA-DF の検証結果と考察を示す。まず、SA-DF を用いたときの keff と pin power の均質化誤差を Table 3.4.2.3 と Table 3.4.2.4 に示す。なお、通常の Unitary DF では DF を評価する体系境界(SA-Unitary DF では集合体外周表面)において ϕ_0 と Φ の DF をそれぞれ別の値を与えるが、表中の SA-Unitary DF(*) は体系境界でも Φ の DF が ϕ_0 の DF と等しいとしている。Table 3.4.2.3 と Table 3.4.2.4 の結果より次のことがわかる。

- (i) Case C (SP3 with SA-Individual DF)、D (SP3 with SA-Unitary DF)及び G (Diffusion with SA-DifDF)の結果より、SA-DF を用いても非均質計算の結果を完全に再現することはできないことがわかる。これは、DF を評価する体系の違いにより Ref-DF と SA-DF に差異が現れるためである。
- (ii) Case B (no DF)と Case C (SA-Individual DF)及び D (SA-Unitary DF)の結果より、Color set geometry No. 2-5 のいずれの問題においても、keff と pin power の均質化誤差が大幅に低減されていること

がわかる。しかし、Color set geometry No. 1 においては keff と最大 pin power の均質化誤差が小さくなっているものの、pin power RMS error は少し大きくなっている。Color set geometry No. 1 は CR や BA 等の吸収体を含まず非均質性が小さいため、そもそも DF を適用しなくても pin power 誤差が小さいセルが多い。そのために、一部のセルでは DF を適用しないことによる pin power 誤差よりも、SA-DF と Ref-DF の差異(スペクトル干渉効果)による pin power 誤差の方が大きくなりうる。その結果、SA-DF を適用することで pin power RMS error が少し大きくなったと考えられる。

- (iii) Case C (SA-Individual DF) 及び D (SA-Unitary DF) の結果より、SA-Individual DF と SA-Unitary DF の均質化誤差低減量はほとんど同じであることがわかる。この結果より、非均質体系の領域表面 3 次モーメント J_3 を均質体系で考慮することが増倍率や反応率の均質化誤差低減に影響を与えない、つまり DF を考えるにあたって中性子流 J_1 より高次の奇数次モーメントを考慮する必要性があまりないことがわかる。

この結果は、Unitary DF が SP3 方程式だけでなく P_N 方程式や SP_N 方程式等のより高次の方程式においてもうまく働く可能性を示唆している。

- (iv) Case B (SP3 with no DF) と F (Diffusion with no DF) の結果より、計算精度が SP3 計算の方が良いことがわかる。しかし、Case B (SP3 with no DF) と E (Diffusion with SA-DifDF) の結果では、計算精度が Case E の方が良い。この結果より、DF 等で均質化誤差を補正しなければ、拡散計算に対する SP3 計算の優位性は失われてしまうことがわかる。つまり、均質 SP3 計算には DF 等の均質化誤差補正因子を用いることが必要不可欠であると言える。

- (v) Case D (SA-Unitary DF) 及び E (SA-Unitary DF^(*)) の結果より、SA-Unitary DF^(*) よりも SA-Unitary DF の方が、均質化誤差をよく低減できることがわかる。また、Case E (SP3 with SA-Unitary DF^(*)) 及び G (Diffusion with SA-DifDF) の結果より、SA-Unitary DF^(*) を用いることで SA-DifDF を用いた拡散計算よりも誤差が大きくなってしまう場合があることがわかる。これらの結果より、DF を評価した体系の境界面においては、Unitary DF の定義通り ϕ_0 と Φ に別々の DF を与えなければ計算精度が致命的に悪くなるといえる。

Table 3.4.2.3 keff の値と均質化誤差(SA-DF)

Case	Calculation	keff				
		keff error [%]				
		Color set geometry No.				
		1	2	3	4	5
A	reference	1.18185	1.10710	1.03992	0.97237	1.15856
B	SP3 with	1.18163	1.10329	1.02837	0.95775	1.15268
	no DF	-0.02	-0.34	-1.11	-1.50	-0.51
C	SP3 with	1.18173	1.10704	1.03955	0.97220	1.15879
	SA-Individual DF	-0.01	-0.01	-0.04	-0.02	0.02
D	SP3 with	1.18172	1.10702	1.03950	0.97205	1.15868
	SA-Unitary DF	-0.01	-0.01	-0.04	-0.03	0.01
E	SP3 with	1.18160	1.10717	1.03885	0.97163	1.15885
	SA-Unitary DF(*)	-0.02	0.01	-0.10	-0.08	0.02
F	Diffusion with	1.18156	1.10026	1.01881	0.94604	1.14679
	no DF	-0.02	-0.62	-2.03	-2.71	-1.02
G	Diffusion	1.18138	1.10679	1.03775	0.97010	1.15797
	with SA-DifDF	-0.04	-0.03	-0.21	-0.23	-0.05

(*) DF for Φ is identical to DF for ϕ_0 at boundary surfaces of the fuel assemblies

Table 3.4.2.4 Pin power の均質化誤差(SA-DF)

Case	Calculation	Pin power RMS error [%]				
		Pin power maximum error [%]				
		Color set geometry No.				
		1	2	3	4	5
B	SP3 with	0.48	1.14	2.42	2.69	2.63
	no DF	2.01	3.76	6.71	7.51	8.11
C	SP3 with	0.55	0.60	0.51	0.55	0.16
	SA-Individual DF	1.45	1.56	1.32	1.42	0.40
D	SP3 with	0.53	0.56	0.49	0.50	0.09
	SA-Unitary DF	1.47	1.58	1.29	1.37	0.23
E	SP3 with	1.19	1.25	1.09	1.12	0.18
	SA-Unitary DF(*)	2.65	2.64	2.78	2.62	0.45
F	Diffusion with	1.15	1.50	3.00	2.93	3.00
	no DF	3.36	3.63	11.41	9.48	9.81
G	Diffusion	1.02	1.08	1.19	1.42	0.48
	with SA-DifDF	1.98	2.20	2.14	3.21	1.55

以上より、次のことが言える。

- SA-Individual DF 及び SA-Unitary DF を pin-by-pin 均質化に適用することで均質化誤差を大幅に低減できる。
- SA-Individual DF と SA-Unitary DF の均質化誤差低減量はほとんど同じである。よって、計算によるメモリ量の観点から SA-Unitary DF の方が優れていると言える。

また、2章で述べた SPH 法で用いられる SPH 因子と DF の関係性と、(iii)及び(iv)の知見より、SP3 計算における SPH 因子について次のことが言える。

- 現在、SP3 方程式における SPH 因子は中性子流 J_1 による領域内漏れ量のみを考慮するように定義され、 ϕ_0 と Φ に同一の SPH 因子が与えられる。(iii)の知見より、 ϕ_0 と Φ に別々の SPH 因子を与えてもあまり効果がないと考えられる。
- Improved SPH 法[13]では、SPH 因子を評価する体系境界での ϕ_0 の不連続性の効果を SPH 因子に取り込んでいる。(iv)の知見より、 ϕ_0 だけでなく Φ の不連続性の効果も考慮することで均質化誤差をより低減できるようになると考えられる。

次に、Figure 3.4.2.1-Figure 3.4.2.5 にそれぞれ Color set geometry No. 4 の Case B (SP3 with no DF)、C (SP3 with SA-Individual DF)、D (SP3 with SA-Unitary DF)、F (Diffusion with no DF) 及び G (Diffusion with SA-DifDF) の pin power error の空間分布を示す。Figure 3.4.2.1-Figure 3.4.2.5 の結果より次のことがわかる。

- (i) Figure 3.4.2.1 よりわかるように、DF を用いない場合は非均質性の強い CR セルと BA セルの付近で均質化誤差が大きくなっている。一方、Figure 3.4.2.2 及び Figure 3.4.2.3 では、SA-Individual DF 及び SA-Unitary DF を用いることで非均質性の強いセル付近でも均質化誤差が大幅に低減されている。
- (ii) Figure 3.4.2.2 及び Figure 3.4.2.3 より SA-Individual DF と SA-Unitary DF では pin power error の空間分布の傾向はほとんど同じであり、集合体隣接境界付近のセルで pin power error が大きくなっていることがわかる。これは、境界付近ではスペクトル干渉効果が強いために SA-DF の誤差が大きくなり、均質化誤差をうまく補正できなくなるためである。
- (iii) Figure 3.4.2.1 及び Figure 3.4.2.4 より、DF を用いない SP3 計算と拡散計算では誤差分布の傾向が似ている。一方、Figure 3.4.2.2、Figure 3.4.2.3 及び Figure 3.4.2.5 より、SA-DF を用いる SP3 計算と拡散計算では誤差の傾向に多少の違いがあることがわかる。

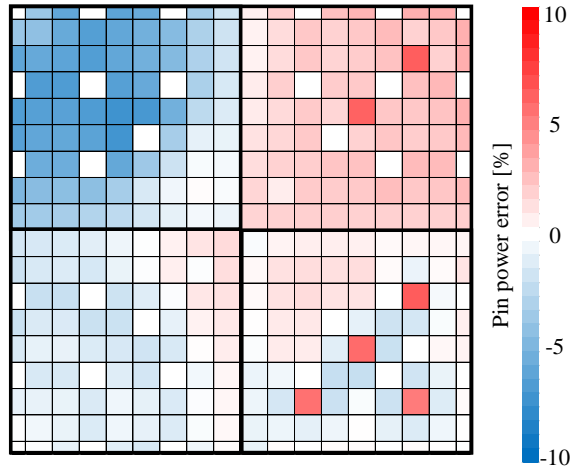


Figure 3.4.2.1 Color set geometry No. 4 の Case B (SP3 with no DF)の pin power error の分布

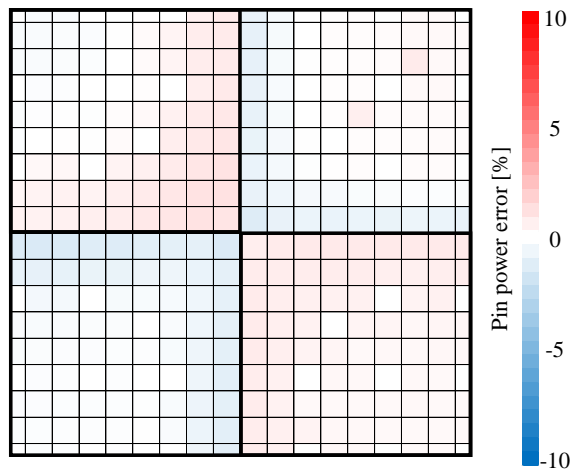


Figure 3.4.2.2 Color set geometry No. 4 の Case C (SP3 with SA-Individual DF)の pin power error の分布

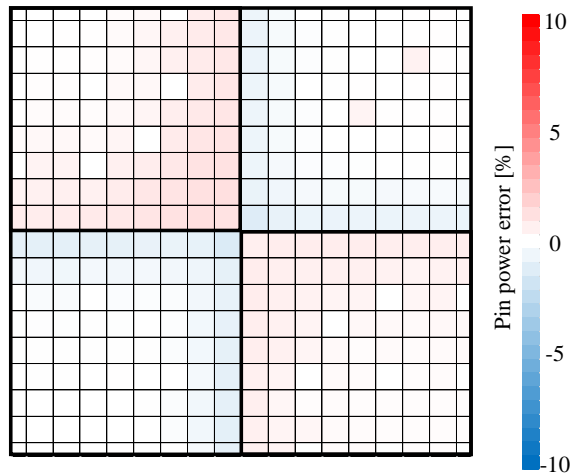


Figure 3.4.2.3 Color set geometry No. 4 の Case D (SP3 with SA-Unitary DF)の pin power error の分布

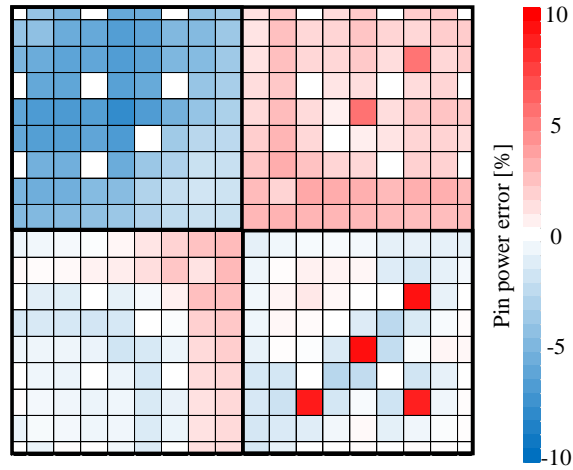


Figure 3.4.2.4 Color set geometry No. 4 の Case F (Diffusion with no DF)の pin power error の分布

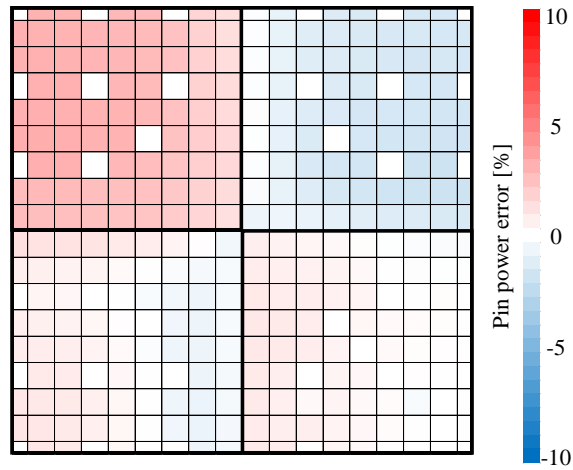


Figure 3.4.2.5 Color set geometry No. 4 の Case G (Diffusion with SA-DifDF)の pin power error の分布

次に、Individual DF、Unitary DF、Diffusion DF の ϕ_0 に対する DF の比較を行う。Color set geometry No. 4 の UOX-1(CR)集合体内の 5 群の Ref-DF を Figure 3.4.2.6 に示す。なお、5 群を選んだのは、DF の位置依存性が大きく、各 DF の違いをみやすかったためである。Position No. は、Cell の位置を (i, j) 、セルの表面位置を d としたとき、Position No. = $4*(i + 9*j) + d$ で計算される。Position No. = 0, 1, 2, 3, 4... はそれぞれ Cell(0,0)の上表面、Cell(0,0)の下表面、Cell(0,0)の左表面、Cell(0,0)の右表面、Cell(1,0)の上表面...を表している。ただし、左上端のセルを Cell(0,0)、右下端のセルを Cell(8, 8)としている。また $d=0,1,2,3$ はそれぞれ上、下、左、右表面を表している。Position No. 0-35, 36-71, 72-107, ..., 288-323 の領域はそれぞれ Cell (0-8, 0), (0-8, 1), (0-8, 2), ..., (0-8, 8)に対する値である。

Figure 3.4.2.6 より次のことがわかる。

- (i) Individual DF、Unitary DF、Diffusion DF のどれも大局的には似た分布を持っている。
- (ii) Individual DF と Unitary DF、Diffusion DF を比べると、Individual DF が一番値の動きが大きいことがわかる。これは Individual DF では非均質体系の領域表面 J_3 を考慮していることに関係があると考えられる。

- (iii) DF の値が局所的に大きく変化しているが、これは CR セルである。値が周りより小さくなっているのは境界面に接している CR セルの表面である。値が周りより大きくなっているのは、CR セルのそれ以外の表面である。

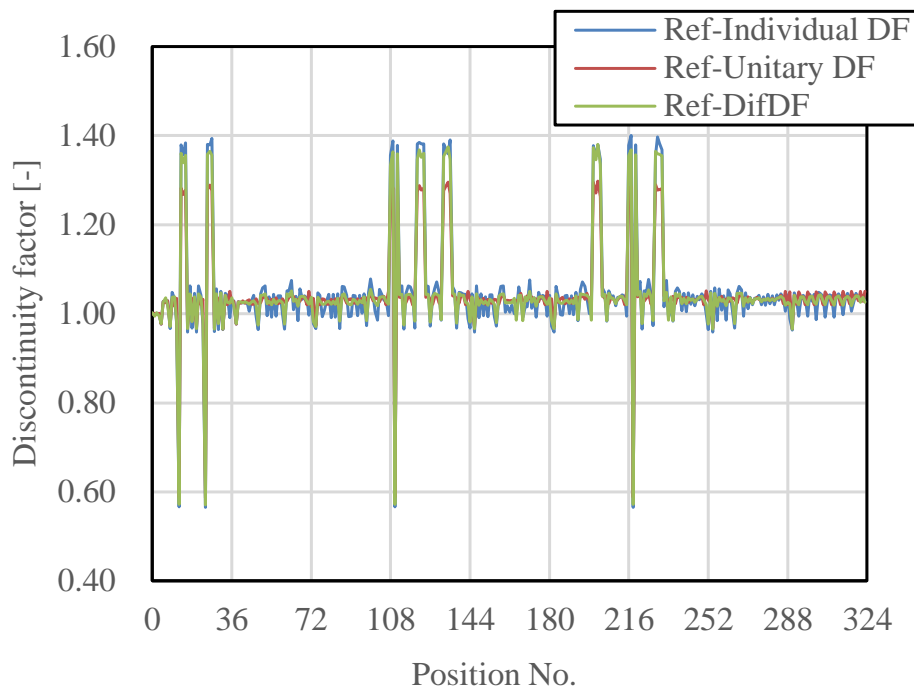


Figure 3.4.2.6 Color set geometry No. 4 の UOX-1(CR)集合体内の 5 群の ϕ_0 に対する Ref-DF

最後に、Ref-DF と SA-DF の比較を行う。Color set geometry No. 4 の UOX-1(CR)集合体内の Ref-DF と SA-DF の差異を Table 3.4.2.5 に示す。表中の DF error は Ref-DF と SA-DF の差異を表しており、 $(SA-DF - Ref-DF) / Ref-DF$ で計算している。また、Color set geometry No. 4 の UOX-1(CR)集合体内の 5 群の各 DF の Ref-DF と SA-DF の差異を Figure 3.4.2.7-Figure 3.4.2.10 に示す。Table 3.4.2.5 と Figure 3.4.2.7-Figure 3.4.2.10 より次のことがわかる。

- (i) Table 3.4.2.5 で、 ϕ_0 に対する Individual DF と Unitary DF の DF error の大きさはそれほど一致していない。しかし、Pin power error の分布 Figure 3.4.2.2 及び Figure 3.4.2.3 を見ると、Pin power error はほとんど同じである。この結果より、DF error の Pin power error に対する感度は小さいと考えられる。
- (ii) Table 3.4.2.5 で、Unitary DF と DifDF の DF error を比較しても、どちらも同程度の大きさである。この結果より、DF を用いた SP3 計算と拡散計算の計算精度の違いは、DF error に依るものではないと考えられる。
- (iii) Figure 3.4.2.7-Figure 3.4.2.10 より、集合体表面で DF error が大きくなっていることがわかる*。これはスペクトル干渉効果の影響と考えられる。また、集合体表面で DF error が負となる(SA-DF が Ref-DF より小さい)傾向があることがわかる。これは、集合体境界で集合体内側の表面中性子束の大きさを過大評価する効果をもたらす。実際、Figure 3.4.2.2、Figure 3.4.2.3 及び Figure 3.4.2.5 を見ると UOX-1(CR)集合体内の Pin power が過大評価されている。

* Position No. 0-35, 36-71, 72-107, ..., 288-323 の領域はそれぞれ Cell (0-8, 0), (0-8, 1), (0-8, 2), ..., (0-8, 8) に対する値である。

Table 3.4.2.5 Color set geometry No. 4 の UOX-1(CR)集合体内の Ref-DF と SA-DF の差異

		RMS DF error [%]						
		Maximum DF error [%]						
		Energy Group						
DF		1	2	3	4	5	6	7
Individual		1.46	0.49	0.12	0.41	0.99	0.76	0.48
DF for ϕ_0		5.03	1.76	0.45	1.55	3.64	2.92	1.35
Individual		34.80	2.50	0.37	2.26	2.75	1.30	0.75
DF for Φ		93.60	5.82	1.53	7.17	7.06	3.52	2.42
Unitary DF		1.13	0.33	0.10	0.29	0.81	0.68	0.82
		2.84	0.74	0.40	0.86	2.64	2.24	3.01
DifDF		1.27	0.39	0.11	0.26	0.63	0.53	0.58
		3.82	1.21	0.50	0.86	2.83	2.53	1.74

$$\text{DF error} = (\text{SA-DF} - \text{Ref-DF}) / \text{Ref-DF}$$

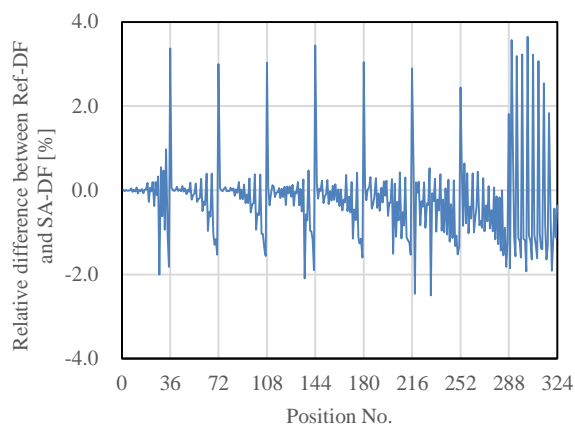


Figure 3.4.2.7 Color set geometry No. 4 の UOX-1(CR)集合体内の 5 群の Individual DF(ϕ_0)

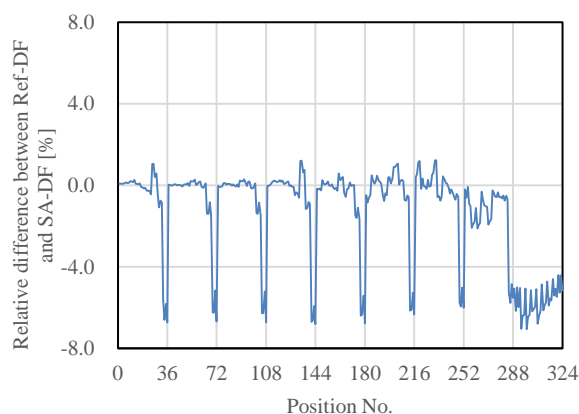


Figure 3.4.2.8 Color set geometry No. 4 の UOX-1(CR)集合体内の 5 群の Individual DF(Φ)

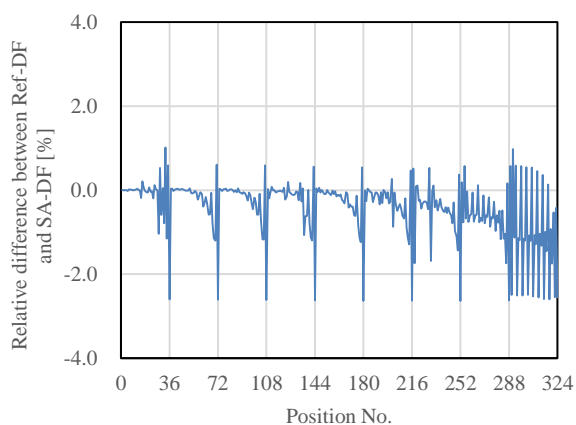


Figure 3.4.2.9 Color set geometry No. 4 の UOX-1(CR)集合体内の 5 群の Unitary DF

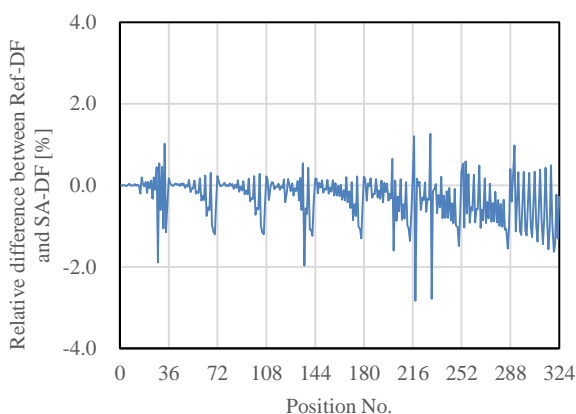


Figure 3.4.2.10 Color set geometry No. 4 の UOX-1(CR)集合体内の 5 群の DifDF

以上が Individual DF と Unitary DF の検証である。以上の検証結果より、Individual DF と Unitary DF の妥当性と pin-by-pin 均質化への適用性を確認できた。

3.5. 本章のまとめ

本章では SP3 方程式における DF として Individual Discontinuity Factor (DF) と Unitary Discontinuity Factor (DF) の提案と検証を行った。3.1 節では Individual DF と Unitary DF の理論を導くのに必要な事柄について説明した。3.2 節と 3.3 節ではそれぞれ Individual DF と Unitary DF の理論の説明を行った。3.4 節では Individual DF と Unitary DF の検証を行った。以下に各節の簡単なまとめを記す。

3.1 節では Individual DF と Unitary DF の理論を導くのに必要な事柄として、 P_N 方程式の理論、SP3 方程式の理論、SP3 方程式における角度中性子束と角度モーメントの関係、SP3 方程式における角度モーメントと部分角度モーメントの関係について説明した。以下に重要な事柄を記す。

- P_N 方程式では角度中性子束と角度モーメントに次式の関係があると近似する。

$$\psi(\vec{\Omega}) \approx \frac{1}{4\pi} \left\{ \phi_0^0 R_0^0(\vec{\Omega}) + 3 \sum_{m=-1}^1 \phi_1^m R_1^m(\vec{\Omega}) + \cdots + (2N+1) \sum_{m=-N}^N \phi_N^m R_N^m(\vec{\Omega}) \right\} \quad (\text{再掲}) (3.1.1.7)$$

- SP3 方程式は 1 次元の P3 方程式に含まれる d/dx を ∇ に置き換えるという経験的な近似を用

いて導かれる。

- SP3 方程式は経験的な近似を用いて導かれるため、(3.1.1.7)式のような角度中性子束と角度モーメントの関係が明示的にはわからない。Ref. [20]によれば、SP3 方程式での角度中性子束と角度モーメントの関係式は次式で近似的に表される。

$$\psi(\vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} (P_0(\mu_J)\phi_0 + 3P_1(\mu_J)J_1 + 5P_2(\mu_J)\phi_2 + 7P_3(\mu_J)J_3) \quad (\text{再掲}) (3.1.3.3)$$

- 2次モーメントはz軸方向の部分中性子流を用いて(3.1.4.15)式、3次モーメントは部分中性子流を用いて(3.1.4.27)式もしくは(3.1.4.28)式で近似的に計算することができる。

$$\phi_2 = -\frac{16}{5} \left(2J_1^{z+} - \frac{1}{2}\phi_0 \right) \quad (\text{再掲}) (3.1.4.15)$$

$$J_3^x = \frac{8}{7} \left(\phi_0^{x+} - \phi_0^{x-} - \frac{3}{2}J_1^x \right) \quad (\text{再掲}) (3.1.4.27)$$

$$J_3^y = \frac{8}{7} \left(\phi_0^{y+} - \phi_0^{y-} - \frac{3}{2}J_1^y \right) \quad (\text{再掲}) (3.1.4.28)$$

3.2節では Individual DF の理論の提案と計算手順の説明を行った。以下に重要な事柄を記す。

- Individual DF は領域表面中性子流 J_1 と 3次モーメント J_3 が保存されるように定義される。
- Individual DF は中性子束 ϕ_0 と $\Phi = \phi_0 + 2\phi_2$ に対して適用される。 Φ ではなく ϕ_2 に直接 DF を適用しないのは数値的不安定性を避けるためである。
- Individual DF を均質計算に適用する際には、 ϕ_2 の連続性に関する式として次式の補助項形式を用いるとよい。

$$f_{0,i+1/2,j}^{s(i,j)} \phi_{2,i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} = f_{0,i+1/2,j}^{s(i+1,j)} \phi_{2,i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j)} + R_{i+1/2,j} \quad (\text{再掲}) (3.2.3.11)$$

$$R_{i+1/2,j} = -\frac{1}{2} \left(f_{0,i+1/2,j}^{s(i+1,j)} \Phi_{i+1/2,j}^{hom,s(i+1,j)} - f_{0,i+1/2,j}^{s(i,j)} \Phi_{i+1/2,j}^{hom,s(i,j)} \right) \quad (\text{再掲}) (3.2.3.12)$$

3.3節では Unitary DF の理論の提案と計算手順の説明を行った。以下に重要な事柄を記す。

- Unitary DF は次の条件を満たすように定義される。
 - ◇ 領域表面中性子流 J_1 を保存する。
 - ◇ 体系の境界表面以外の領域表面で ϕ_0 に対する DF と Φ に対する DF が等しい。
 - ◇ 体系の境界表面以外の領域表面で 3次モーメント J_3 が連続である。
 - ◇ DF を計算する体系の境界表面においては ϕ_0 と Φ でそれぞれ別々に DF を与える。
- Unitary DF は中性子束 ϕ_0 と $\Phi = \phi_0 + 2\phi_2$ に対して適用される。 Φ ではなく ϕ_2 に直接 DF を適用しないのは数値的不安定性を避けるためである。
- Unitary DF を均質計算に適用する際には、 ϕ_2 の連続性に関する式として Individual DF と同様に補助項形式を用いるとよい。
- Unitary DF は Individual DF よりも計算に要するメモリ量が少ない。

3.4節では Individual DF と Unitary DF の検証を2次元カラーセット体系で行った。以下に重要な事柄を記す。

- reference とする非均質計算の結果より計算した DF を用いた均質計算が非均質計算の結果を再現したことから、Individual DF と Unitary DF の理論の妥当性を確認した。
- Individual DF と Unitary DF を pin-by-pin 均質化に適用することで均質化誤差を大幅に低減できたことより、Individual DF と Unitary DF の pin-by-pin 均質化への適用性を確認した。
- Individual DF と Unitary DF では、均質化誤差低減量がほとんど同じであった。そのため、計算に要するメモリ量の観点から Unitary DF の方が優れていると言える。
- 検証の結果得られた知見と第 2 章で述べた SPH 因子と DF の関係性より、SP3 計算における SPH 因子について次のことが言える可能性があることがわかった。
 - ✧ ϕ_0 と Φ に別々の SPH 因子を与えてもあまり効果がない。
 - ✧ Improve SPH 法において、 ϕ_0 だけでなく Φ の不連続性の効果も考慮することで均質化誤差をより低減できるようになる。

第4章 微積分型輸送方程式における DF

本章では微積分型輸送方程式における不連続因子(DF)について述べる。なお、微積分型輸送方程式は MOC や S_N 法の基礎式であり次式で表される。次式では等方散乱を仮定している。

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \quad (4.1)$$

$$Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dE' \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E') + \frac{\chi(\vec{r}, E)}{4\pi k_{eff}} \int_0^\infty dE' \nu \Sigma_f(\vec{r}, E') \phi(\vec{r}, E') \quad (4.2)$$

微積分型輸送方程式における DF について簡単に説明する。まず、拡散方程式と微積分型輸送方程式における DF には次の違いがある。

- (1) 拡散方程式における DF は中性子流を保存するように定義される。一方、微積分型輸送方程式における DF は中性子流だけでなく、より多くの量を保存するように定義することができる。そのため、拡散方程式における DF と異なり、微積分型輸送方程式における DF には様々な定義の仕方を考えることができる。
- (2) 第 2 章で述べたように、拡散方程式は中性子束、即ち角度モーメントの微分方程式であるため、拡散方程式における DF は角度モーメントの不連続さとして定義することができる。しかし、微積分型輸送方程式は角度中性子束に対する微分方程式であるため、角度中性子束の不連続さとして DF を定義しなくてはならない。そのため、拡散方程式の DF と同じように考えることができない。

この(1)はどのように定義した DF が、均質化誤差をよく低減できるか、実用的(計算に必要なメモリ量など)であるか等についてよく検討する必要があるということを示唆している。また、(2)は微積分型輸送方程式における DF の難しさを示唆している。

さて、上記のように微積分型輸送方程式における DF には様々な定義の仕方が存在するため、次に示すように過去に複数の DF が提案されている。

- **Ref. [7,8]:** DF は even-parity 角度中性子束に対して適用され、領域表面で even-parity 角度中性子束を不連続とする。DF は領域表面 odd-parity 角度中性子束が保存されるように決められる。本論文の中では even parity angular flux discontinuity factor (EPDF) と呼んでいる。
- **Ref. [9]:** DF は角度中性子束に対して適用され、領域表面で角度中性子束を不連続にする。非均質体系と均質体系で増倍率が等しくなるように反復法を用いて DF を計算する。
- **Ref. [10]:** DF は放出角度中性子束に対して適用される。非均質計算と均質計算で流入角度中性子束が等しくなるように DF で放出角度中性子束を調整する。
- **Ref. [11]:** DF は角度中性子束に対して適用され、領域表面で角度中性子束を不連続にする。ダイヤモンド差分に基づく S_N 法に対する DF の理論である。

微積分型輸送方程式における DF は、このように過去にいくつか提案されているが、まだ近年活発に研究がなされ始めた段階である。そのため、DF をどのように定義することで良い性質(均質化誤差をよく低減できるなど)の DF となるかは明らかになっていない。そのため、本論文では微積分型輸送方程式に対する新しい DF を提案し、その性質(均質化誤差低減量やその他の特徴)を検証することを

目的としている。

具体的には、微積分型輸送方程式における DF として **angular flux discontinuity factor (AFDF)** の提案及び検証を行う。AFDF は、領域内の漏れ量を保存するように定義される。また、AFDF は角度中性子束に対して適用され、領域表面で角度中性子束を不連続とする。

本章の構成について説明する。4.1 節では、過去に提案されている微積分型輸送方程式における DF である **even-parity angular flux discontinuity factor (EPDF)** について、その理論及び計算手順について述べる。次に 4.2 節では本研究で提案する **angular flux discontinuity factor (AFDF)** について、その理論及び計算手順について述べる。4.3 節では、均質化全断面積の角度依存性について述べる。EPDF 及び AFDF を用いる均質計算において、均質化全断面積には **even-parity** 角度中性子束または角度中性子束重み(角度依存性あり)と全中性子束重み(角度依存性なし)のどちらも用いることができる。この節では、全中性子束重みの均質化全断面積を用いることができることの証明を行う。4.4 節では以下についての検証を行う。

- AFDF の妥当性について
 - AFDF と EPDF の **pin-by-pin** 均質化への適用性について
 - 均質化全断面積の角度依存性が計算精度に与える影響について
- 最後に、4.5 節に本章のまとめを記す。

4.1. Even-parity angular flux discontinuity factor (EPDF)

本節では **even-parity angular flux discontinuity factor (EPDF)** についてその理論と計算手順について説明する。EPDF は微積分型輸送方程式における DF である[7,8]。EPDF は、中性子流に対応する **odd-parity** 角度中性子束を領域表面で保存するように定義される。また、EPDF は **even-parity** 角度中性子束に対して適用され、領域表面で **even-parity** 角度中性子束を不連続とする。

4.1.1. 理論

本項では **even-parity angular flux discontinuity factor (EPDF)** の理論について以下の順に述べる。

- **導出**：非均質体系と均質体系の輸送方程式を空間積分した式を比べ、均質計算において非均質計算の結果を再現するために必要なことについて考える。
- **均質計算への適用方法**：均質計算において EPDF を具体的にどの様に適用するかについて説明する。

導出

EPDF の導出を行う。簡単のため、以下に示す等方散乱を仮定した 1 次元 1 群の輸送方程式について考える。

$$\mu \frac{d\psi(\mu, x)}{dx} + \Sigma_t(x)\psi(\mu, x) = Q(x) \quad (4.1.1.1)$$

$$Q(x) = \frac{1}{4\pi} \Sigma_s(x)\phi(x) + \frac{1}{4\pi k} \nu \Sigma_f(x)\phi(x) \quad (4.1.1.2)$$

ただし、 μ は x 軸に対する方向余弦である。

まず、(4.1.1.1)式の角度中性子束に対する輸送方程式を、**even-parity** 角度中性子束及び **odd-parity** 角

度中性子束に対する輸送方程式に変形する。even-parity 角度中性子束 ϕ^e と odd-parity 角度中性子束 ϕ^o はそれぞれ次式で定義される。

$$\phi^e(\mu, x) \equiv \frac{\psi(\mu, x) + \psi(-\mu, x)}{2} \quad (4.1.1.3)$$

$$\phi^o(\mu, x) \equiv \frac{\psi(\mu, x) - \psi(-\mu, x)}{2} \quad (4.1.1.4)$$

ここで留意すべきは、角度中性子束をルジャンドル多項式(多次元であれば球面調和関数)で展開することを考えたとき、 ϕ^e は偶数次の項、 ϕ^o は奇数次の項のみで構成されることである。つまり、 ϕ^e は全中性子束のような量に対応し、 ϕ^o は中性子の流れに関する量に対応している。さて、(4.1.1.1)式とは逆方向の角度中性子束に対する輸送方程式は次式で表される。

$$-\mu \frac{d\psi(-\mu, x)}{dx} + \Sigma_t(x)\psi(-\mu, x) = Q(x) \quad (4.1.1.5)$$

(4.1.1.1)式と(4.1.1.5)式の両辺を足した式と引いた式から、次式の even-parity 角度中性子束と odd-parity 角度中性子束に対する輸送方程式が導ける。

$$\mu \frac{d\phi^o(\mu, x)}{dx} + \Sigma_t(x)\phi^e(\mu, x) = Q(x) \quad (4.1.1.6)$$

$$\mu \frac{d\phi^e(\mu, x)}{dx} + \Sigma_t(x)\phi^o(\mu, x) = 0 \quad (4.1.1.7)$$

これらの式より $\phi^o(\mu, x)$ を消去して次式を得る。

$$\mu \frac{d}{dx} \left(\frac{\mu}{\Sigma_t(x)} \frac{d\phi^e(\mu, x)}{dx} \right) + \Sigma_t(x)\phi^e(\mu, x) = Q(x) \quad (4.1.1.8)$$

(4.1.1.8)式よりわかるように、even-parity 角度中性子束と odd-parity 角度中性子束に対する輸送方程式は、even-parity 角度中性子束に対する 2 階の微分方程式と考えることができる。

ここからは(4.1.1.6)式を空間積分した式を用いて、均質計算と非均質計算の結果が一致するために必要なことについて考えることで EPDF を導出する。まず Figure 4.1.1.1 に示す体系の region i 内を均質化することを考える。

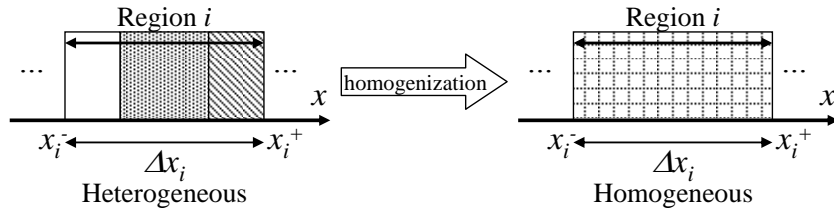


Figure 4.1.1.1 1次元空間の均質化

非均質体系における輸送方程式(4.1.1.6)式を region i 内で空間積分することで次式を得る。

$$\mu \frac{\phi^{het,o}(\mu, x_i^+) - \phi^{het,o}(\mu, x_i^-)}{\Delta x_i} + \bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}(\mu) \bar{\phi}_i^{het,e}(\mu) = \frac{1}{4\pi} \bar{\Sigma}_{s,i} \bar{\phi}_i^{het} + \frac{1}{4\pi k^{het}} \bar{\nu} \bar{\Sigma}_{f,i} \bar{\phi}_i^{het} \quad (4.1.1.9)$$

ただし、

$$\bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}(\mu) = \int_i \Sigma_t(x) \phi^{het,e}(\mu, x) dx / \int_i \phi^{het,e}(\mu, x) dx \quad (4.1.1.10)$$

$$\bar{\Sigma}_{R,i} = \int_{x_i^-}^{x_i^+} \Sigma_R(x) \phi_i^{het}(x) dx / \int_{x_i^-}^{x_i^+} \phi_i^{het}(x) dx \quad (4.1.1.11)$$

$$\bar{\phi}_i^e(\mu) = \int_i \phi^e(\mu, x) dx / \int_i dx \quad (4.1.1.12)$$

$$\bar{\phi}_i = \int_{x_i^-}^{x_i^+} \phi_i(x) dx / \int_{x_i^-}^{x_i^+} dx \quad (4.1.1.13)$$

であり、 $\bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}(\mu)$ は even-parity 角度中性子束重みの均質化全断面積、 $\bar{\Sigma}_{R,i}$ は反応 R の全中性子束重みの均質化断面積、 $\bar{\phi}_i^e$ と $\bar{\phi}_i$ はそれぞれ領域平均の even-parity 角度中性子束と全中性子束を表している。また、添字 *het* は非均質体系における量であることを示している。(4.1.1.10)式よりわかるように、even-parity 角度中性子束重みの均質化全断面積は角度依存性を持つ。以降の導出では even-parity 角度中性子束重みの均質化全断面積を用いるが、全中性子束重みの均質化断面積を用いることもできる。これについては 4.3 節で述べる。以上の手順から得られた均質化断面積を用いて、均質体系の輸送方程式は次式で表される。

$$\mu \frac{d\phi^{hom,o}(\mu, x)}{dx} + \bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}(\mu) \phi^{hom,e}(\mu, x) = \frac{1}{4\pi} \bar{\Sigma}_{s,i} \phi^{hom}(x) + \frac{1}{4\pi k^{hom}} \bar{\nu} \bar{\Sigma}_{f,i} \phi^{hom}(x) \quad (4.1.1.14)$$

$$\mu \frac{d\phi^{hom,e}(\mu, x)}{dx} + \bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}(\mu) \phi^{hom,o}(\mu, x) = 0 \quad (4.1.1.15)$$

ただし添字 *hom* は均質体系における量であることを示している。(4.1.1.14)式を region i 内で空間積分することで次式を得る。

$$\mu \frac{\phi^{hom,o}(\mu, x_i^+) - \phi^{hom,o}(\mu, x_i^-)}{\Delta x_i} + \bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}(\mu) \bar{\phi}_i^{hom,e}(\mu) = \frac{1}{4\pi} \bar{\Sigma}_{s,i} \bar{\phi}_i^{hom} + \frac{1}{4\pi k^{hom}} \bar{\nu} \bar{\Sigma}_{f,i} \bar{\phi}_i^{hom} \quad (4.1.1.16)$$

非均質体系と均質体系における領域平均の中性子バランス式である(4.1.1.9)式と(4.1.1.16)式を見比べることで、均質計算において非均質計算の結果(領域平均反応率、増倍率)を再現するためには、次の条件(領域表面 odd-parity 角度中性子束が非均質体系のそれと等しい)が成り立てば良いことがわかる。

$$\phi^{hom,o}(\mu, x_i^+) = \phi^{het,o}(\mu, x_i^+) \quad (4.1.1.17)$$

$$\phi^{hom,o}(\mu, x_i^-) = \phi^{het,o}(\mu, x_i^-) \quad (4.1.1.18)$$

さて、上で述べたように、even-parity 角度中性子束と odd-parity 角度中性子束に対する輸送方程式は、even-parity 角度中性子束に対する 2 階の微分方程式と考えることができる。そのため、この輸送方程式を解くには 2 つの束縛条件を与える必要がある。そこで、各領域内の均質体系の輸送方程式(4.1.1.14)式に対して(4.1.1.17)式と(4.1.1.18)式の 2 つの束縛条件を与えて解く。その結果、非均質計算の結果を再現する均質体系の even-parity 角度中性子束の空間分布が求まる。この even-parity 角度中性子束の空間分布の概念図を Figure 4.1.1.2 に示す。Figure 4.1.1.2 よりわかるように、均質体系においては各領域で別個に方程式を解いたため、領域表面で even-parity 角度中性子束が不連続となる。

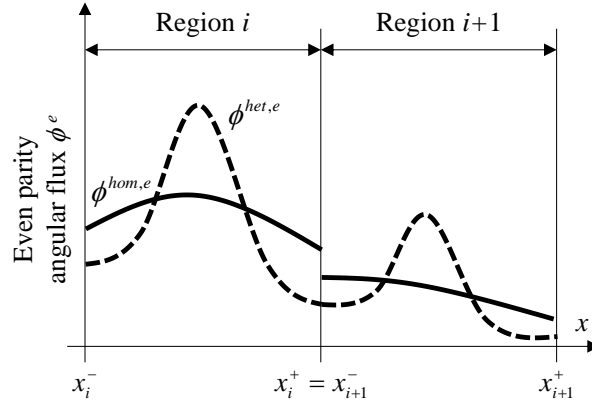


Figure 4.1.1.2 非均質計算の結果を再現する均質体系の even-parity 角度中性子束の空間分布

非均質体系とこの均質体系(非均質計算の結果を再現する)の領域表面 even-parity 角度中性子束を用いて次式で EPDF を定義する。

$$f_{i,x_i^\pm}^{EP}(\mu) \equiv \frac{\phi^{het,e}(\mu, x_i^\pm)}{\phi^{hom,e}(\mu, x_i^\pm)} \quad (4.1.1.19)$$

非均質計算の結果を再現するときの領域表面での even-parity 及び odd-parity 角度中性子束の関係は EPDF を用いて次式で表される。

$$\frac{\phi^{hom,e}(\mu, x_{i+1}^-)}{\phi^{hom,e}(\mu, x_i^+)} = \frac{\phi^{het,e}(\mu, x_i^+)/\phi^{hom,e}(\mu, x_i^+)}{\phi^{het,e}(\mu, x_{i+1}^-)/\phi^{hom,e}(\mu, x_{i+1}^-)} = \frac{f_{i,x_i^+}^{EP}(\mu)}{f_{i+1,x_{i+1}^-}^{EP}(\mu)} \quad (4.1.1.20)$$

$$\phi^{hom,o}(\mu, x_i^+) = \phi^{hom,o}(\mu, x_{i+1}^-) \quad (4.1.1.21)$$

以上が EPDF の導出である。

均質計算への適用方法

次に、EPDF を用いた均質計算について説明する。通常、輸送計算を行う際には領域表面で角度中性子束が連続であるという次の連続性に関する条件を与える。

$$\psi(\mu, x_i^+) = \psi(\mu, x_{i+1}^-) \quad (4.1.1.22)$$

(4.1.1.22)式を even-parity 及び odd-parity 角度中性子束の形式に直すと次式となる。

$$\phi^e(\mu, x_i^+) = \phi^e(\mu, x_{i+1}^-) \quad (4.1.1.23)$$

$$\phi^o(\mu, x_i^+) = \phi^o(\mu, x_{i+1}^-) \quad (4.1.1.24)$$

しかし、この条件では非均質計算の結果を再現できない。EPDF を用いた均質計算では、領域表面において次の不連続性の条件を与える。

$$f_{i,x_i^+}^{EP}(\mu)\phi^{hom,e}(\mu, x_i^+) = f_{i+1,x_{i+1}^-}^{EP}(\mu)\phi^{hom,e}(\mu, x_{i+1}^-) \quad (4.1.1.25)$$

$$\phi^{hom,o}(\mu, x_i^+) = \phi^{hom,o}(\mu, x_{i+1}^-) \quad (4.1.1.26)$$

(4.1.1.25)式と(4.1.1.26)式を用いることで、非均質計算の結果を再現するときの領域表面での even-parity 及び odd-parity 角度中性子束の関係式である(4.1.1.20)式と(4.1.1.21)式を満たすことができる。

S_N 法等に対して EPDF を適用する際は、(4.1.1.25)式と(4.1.1.26)式をそのまま用いることができないため、これらを角度中性子束の形式に直す必要がある。例えば、 $\psi^{hom}(\mu, x_{i+1}^-)$ を更新する際には次の関係式を用いる。

$$\psi^{hom}(\mu, x_{i+1}^-) = \frac{f_{i,x_i^+}^{EP} / f_{i+1,x_{i+1}^-}^{EP} + 1}{2} \psi^{hom}(\mu, x_i^+) + \frac{f_{i,x_i^+}^{EP} / f_{i+1,x_{i+1}^-}^{EP} - 1}{2} \psi^{hom}(-\mu, x_i^+) \quad (4.1.1.27)$$

以上が EPDF の理論である。EPDF の課題は、EPDF が角度依存性を持っているという点である。EPDF は各領域の表面で保持しておく量であるため、計算に要するメモリ量の観点から、EPDF が詳細な角度依存性を持つことは好ましくない。この課題を解決するためには、この角度依存性を関数展開等する必要があると考えられる。また、(4.1.1.27)式を適用する際には、領域表面で逆方向の角度中性子束を使用するため、これを保持しておく必要がある。MOC 等では、中性子の飛行方向に沿って計算を進めることで、領域表面(体系境界を除く)における角度中性子束を保持する必要性を排除しており、これにより必要なメモリ量を大幅に削減している。EPDF を大型体系において直接適用する場合には、この点についても問題を解決しなければならない。

4.1.2. 計算手順

本項では EPDF の計算手順について述べる。

1次元 S_N 法 1メッシュ

EPDF の計算手順についてのイメージを掴むため、次に示す簡単な条件での EPDF の計算について説明する。

- 1次元平板体系、1群、固有値問題(4.1.1節と同じ問題設定)
- 均質計算を S_N 法(step characteristics scheme)で行う。
- 均質化領域を1メッシュとする。
- 中性子源分布は領域内で一定とする。

均質化領域 i 内の流入角度中性子束と流出角度中性子束は次式の関係を満たす。

$$\psi_i^{hom,out}(\mu, x_i^+) = E_i(\mu) \psi_i^{hom,in}(\mu, x_i^-) + \{1 - E_i(\mu)\} \frac{\bar{Q}_i^{hom}}{\bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}(\mu)} \quad (4.1.2.1)$$

ただし、

$$E_i(\mu) = \exp\left(-\bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}(\mu) \frac{\Delta x_i}{\mu}\right) \quad (4.1.2.2)$$

$$\bar{Q}_i^{hom} = \frac{1}{4\pi} \bar{\Sigma}_{s,i} \bar{\phi}_i^{hom} + \frac{1}{4\pi k^{hom}} \bar{\nu} \bar{\Sigma}_{f,i} \bar{\phi}_i^{hom} \quad (4.1.2.3)$$

である。逆方向については次式が成り立つ。

$$\psi_i^{hom,out}(-\mu, x_i^-) = E_i(\mu) \psi_i^{hom,in}(-\mu, x_i^+) + \{1 - E_i(\mu)\} \frac{\bar{Q}_i^{hom}}{\bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}(\mu)} \quad (4.1.2.4)$$

ここで、(4.1.1.13)式及び(4.1.1.14)式から角度中性子束は even-parity 及び odd-parity 角度中性子束を用いて次式で表されることがわかる。

$$\psi(\mu, x) = \phi^e(\mu, x) + \phi^o(\mu, x) \quad (4.1.2.5)$$

$$\psi(\mu, x) = \phi^e(\mu, x) - \phi^o(\mu, x) \quad (4.1.2.6)$$

(4.1.2.5)式と(4.1.2.6)式より(4.1.2.1)式と(4.1.2.4)式はそれぞれ次式に示すように even-parity 及び odd-parity 角度中性子束を用いて表される。

$$\begin{aligned} & \phi_i^{hom,e}(\mu, x_i^+) + \phi_i^{hom,o}(\mu, x_i^+) \\ &= E_i(\mu) \left(\phi_i^{hom,e}(\mu, x_i^-) + \phi_i^{hom,o}(\mu, x_i^-) \right) + \{1 - E_i(\mu)\} \frac{\bar{Q}_i^{hom}}{\bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}(\mu)} \end{aligned} \quad (4.1.2.7)$$

$$\begin{aligned} & \phi_i^{hom,e}(\mu, x_i^-) - \phi_i^{hom,o}(\mu, x_i^-) \\ &= E_i(\mu) \left(\phi_i^{hom,e}(\mu, x_i^+) - \phi_i^{hom,o}(\mu, x_i^+) \right) + \{1 - E_i(\mu)\} \frac{\bar{Q}_i^{hom}}{\bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}(\mu)} \end{aligned} \quad (4.1.2.8)$$

さて、領域表面で odd-parity 角度中性子束を保存するという束縛条件((4.1.1.17)式と(4.1.1.18)式)を与えた均質計算について考える。4.1.1節の導出で述べたように、この束縛条件を与えるとき、均質計算は非均質計算の結果を再現する。つまり、次式が成り立つ。

$$\bar{Q}_i^{hom} = \bar{Q}_i^{het} = \frac{1}{4\pi} \bar{\Sigma}_{s,i} \bar{\phi}_i^{het} + \frac{1}{4\pi k^{het}} \bar{\nu} \bar{\Sigma}_{f,i} \bar{\phi}_i^{het} \quad (4.1.2.9)$$

(4.1.2.9)式と束縛条件(4.1.1.17)式及び(4.1.1.18)式を(4.1.2.7)式と(4.1.2.8)式に代入する。

$$\begin{aligned} & \phi_i^{hom,e}(\mu, x_i^+) + \phi_i^{het,o}(\mu, x_i^+) \\ &= E_i(\mu) \left(\phi_i^{hom,e}(\mu, x_i^-) + \phi_i^{het,o}(\mu, x_i^-) \right) + \{1 - E_i(\mu)\} \frac{\bar{Q}_i^{het}}{\bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}(\mu)} \end{aligned} \quad (4.1.2.10)$$

$$\begin{aligned} & \phi_i^{hom,e}(\mu, x_i^-) - \phi_i^{het,o}(\mu, x_i^-) \\ &= E_i(\mu) \left(\phi_i^{hom,e}(\mu, x_i^+) - \phi_i^{het,o}(\mu, x_i^+) \right) + \{1 - E_i(\mu)\} \frac{\bar{Q}_i^{het}}{\bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}(\mu)} \end{aligned} \quad (4.1.2.11)$$

領域表面 even-parity 角度中性子束 $\phi_i^{hom,e}(\mu, x_i^+)$ と $\phi_i^{hom,e}(\mu, x_i^-)$ に関する連立方程式(4.1.2.10)式、(4.1.2.11)式を解くことで非均質計算の結果を再現するときの領域表面 even-parity 角度中性子束を次式に示すように求めることができる。

$$\phi_i^{hom,e}(\mu, x_i^+) = \frac{-\left(1 + \{E_i(\mu)\}^2\right)\phi_i^{het,o}(\mu, x_i^+) + 2E_i(\mu)\phi_i^{het,o}(\mu, x_i^-)}{1 - \{E_i(\mu)\}^2} + \frac{\bar{Q}_i^{het}}{\bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}(\mu)} \quad (4.1.2.12)$$

$$\phi_i^{hom,e}(\mu, x_i^-) = \frac{-2E_i(\mu)\phi_i^{het,o}(\mu, x_i^+) + \left(1 + \{E_i(\mu)\}^2\right)\phi_i^{het,o}(\mu, x_i^-)}{1 - \{E_i(\mu)\}^2} + \frac{\bar{Q}_i^{het}}{\bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}(\mu)} \quad (4.1.2.13)$$

以上の手順で求められた均質計算の領域表面 **even-parity** 角度中性子束と非均質計算のそれを用いて、各領域表面で(4.1.1.19)式により **EPDF** を計算する。

以上が 1 次元 S_N 法 1 メッシュという簡単な条件での **EPDF** の計算手順である。

束縛条件を与えた均質計算

上記の **EPDF** の計算手順では、均質化領域を 1 メッシュとしたため、領域表面で **odd-parity** 角度中性子束を保存するという束縛条件を与えた均質計算を解析的に解き、領域表面 **even-parity** 角度中性子束を解析的に計算することができた。しかし、均質化領域内を複数メッシュとする場合には、解析的に解くことは難しい。また、均質計算に輸送ノード法を用いる場合にも同様に解析的に解くことは難しい。以下に、この均質計算を解析的に解くことが難しい場合に用いる反復計算の計算手順を示す。なお、この反復計算は 4.4 節の検証計算で **EPDF** の計算に用いている。また、均質計算に S_N 法や **MOC** といった角度中性子束そのものを取り扱うタイプの計算手法を用いることを想定している。

- (9) 対象とする均質化領域において、中性子源の空間分布と入射角度中性子束が未知であるため、中性子源の空間分布と入射角度中性子束の初期値を与える。
- (10) 全ての角度について、入射角度中性子束及び中性子源から流出角度中性子束と角度中性子束の空間分布(もしくはメッシュ平均角度中性子束)を計算する。
- (11) **Step (2)**で得られた角度中性子束の空間分布(もしくはメッシュ平均角度中性子束)から、全中性子束の空間分布(もしくはメッシュ平均全中性子束)を計算する。さらに、得られた全中性子束を用いて中性子源の空間分布(もしくはメッシュ平均中性子源)を計算する。なお、均質化領域内での中性子源の空間積分値が非均質計算のそれと一致するように中性子源を規格化すると計算が安定する。
- (12) 入射角度中性子束と流出角度中性子束は **odd-parity** 角度中性子束を保存するという束縛条件(4.1.2.14)式を満たさなくてはならない。そこで、流出角度中性子束、非均質計算の **odd-parity** 角度中性子束と(4.1.2.14)式を用いて入射角度中性子束を更新する。流出角度中性子束と得られた流入角度中性子束を用いて領域表面 **even-parity** 角度中性子束を計算する。

$$\frac{\psi_{surface}^{hom}(\vec{\Omega}) - \psi_{surface}^{hom}(-\vec{\Omega})}{2} = \phi_{surface}^{het,o}(\vec{\Omega}) \quad (4.1.2.14)$$

- (13) **Step (2)**-(4)を領域表面 **even-parity** 角度中性子束が収束するまで繰り返す。

EPDF の計算手順

次に **EPDF** の全体的な計算手順を以下に示す。

- (1) 非均質輸送計算を行う。
- (2) **Step (1)**の結果より均質化断面積、均質化領域表面の **even-parity** 角度中性子束と **odd-parity** 角度中性子束を計算する。

- (3) Step (2)で得た領域表面 odd-parity 角度中性子束を束縛条件として与えた均質計算を各均質化領域において行う。この均質計算については上で述べた。
- (4) Step (3)の結果より、均質体系における均質化領域表面の even-parity 角度中性子束を計算する。
- (5) Step (2)と(4)で得た均質化領域表面の even-parity 角度中性子束の比をとることで EPDF を計算する。

4.2. Angular Flux Discontinuity Factor (AFDF)

4.2 節では本研究で提案する angular flux discontinuity factor (AFDF)について、その理論及び計算手順について述べる。AFDF は、領域内の漏れ量を保存するように定義される。また、AFDF は角度中性子束に対して適用され、領域表面で角度中性子束を不連続とする。

4.2.1. 理論

本項では angular flux discontinuity factor (AFDF)の理論について以下の順に述べる。

- ・ **導出**：非均質体系と均質体系の輸送方程式を空間積分した式を比べ、均質計算において非均質計算の結果を再現するために必要なことについて考える。
- ・ **均質計算への適用方法**：均質計算において AFDF を具体的にどの様に適用するかについて説明する。

導出

AFDF の導出を行う。簡単のため、以下に示す等方散乱を仮定した 1 次元 1 群の輸送方程式について考える。

$$\mu \frac{d\psi(\mu, x)}{dx} + \Sigma_t(x)\psi(\mu, x) = Q(x) \quad (4.2.1.1)$$

$$Q(x) = \frac{1}{4\pi} \Sigma_s(x)\phi(x) + \frac{1}{4\pi k} \nu \Sigma_f(x)\phi(x) \quad (4.2.1.2)$$

ただし、 μ は x 軸に対する方向余弦である。

(4.2.1.1)式を空間積分した式を用いて、均質計算と非均質計算の結果が一致するために必要なことについて考えることで AFDF を導出する。まず Figure 4.1.1.1 に示す体系の region i 内を均質化することを考える。

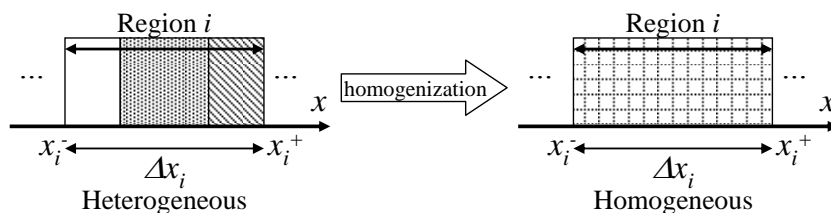


Figure 4.1.1.1 1次元空間の均質化

非均質体系における輸送方程式(4.2.1.1)式を region i 内で空間積分することで次式を得る。

$$L_i^{het}(\mu) + \bar{\Sigma}_{t,i}^{AF}(\mu)\bar{\psi}_i^{het}(\mu) = \frac{1}{4\pi}\bar{\Sigma}_{s,i}\bar{\phi}_i^{het} + \frac{1}{4\pi k^{het}}\bar{\nu}\bar{\Sigma}_{f,i}\bar{\phi}_i^{het} \quad (4.2.1.3)$$

ただし、

$$L_i(\mu) = \mu \frac{\psi(\mu, x_i^+) - \psi(\mu, x_i^-)}{\Delta x_i} \quad (4.2.1.4)$$

$$\bar{\Sigma}_{t,i}^{AF}(\mu) = \int_i \Sigma_t(x)\psi^{het}(\mu, x)dx / \int_i \psi^{het}(\mu, x)dx \quad (4.2.1.5)$$

$$\bar{\Sigma}_{R,i} = \int_{x_i^-}^{x_i^+} \Sigma_R(x)\phi_i^{het}(x)dx / \int_{x_i^-}^{x_i^+} \phi_i^{het}(x)dx \quad (4.2.1.6)$$

$$\bar{\psi}_i(\mu) = \int_i \psi(\mu, x)dx / \int_i dx \quad (4.2.1.7)$$

$$\bar{\phi}_i = \int_{x_i^-}^{x_i^+} \phi_i(x)dx / \int_{x_i^-}^{x_i^+} dx \quad (4.2.1.8)$$

であり、 $L_i(\mu)$ は region i 内における角度 μ の漏れ量を表している。 $\bar{\Sigma}_{t,i}^{AF}(\mu)$ は角度中性子束重みの均質化全断面積、 $\bar{\Sigma}_{R,i}$ は反応 R の全中性子束重みの均質化断面積、 $\bar{\psi}_i$ と $\bar{\phi}_i$ はそれぞれ領域平均の角度中性子束と全中性子束を表している。また添字 het は非均質体系における量であることを示している。(4.2.1.5)式よりわかるように、角度中性子束重みの均質化全断面積は角度依存性を持つ。以降の導出では角度中性子束重みの均質化全断面積を用いるが、全中性子束重みの均質化断面積を用いることもできる。これについては 4.3 節で述べる。以上の手順から得られた均質化断面積を用いて、均質体系の輸送方程式は次式で表される。

$$\mu \frac{d\psi^{hom}(\mu, x)}{dx} + \bar{\Sigma}_{t,i}^{AF}(\mu)\psi^{hom}(\mu, x) = \frac{1}{4\pi}\bar{\Sigma}_{s,i}\phi^{hom}(x) + \frac{1}{4\pi k^{hom}}\bar{\nu}\bar{\Sigma}_{f,i}\phi^{hom}(x) \quad (4.2.1.9)$$

(4.2.1.9)式を region i 内で空間積分することで次式を得る。

$$L_i^{hom}(\mu) + \bar{\Sigma}_{t,i}^{AF}(\mu)\bar{\psi}_i^{hom}(\mu) = \frac{1}{4\pi}\bar{\Sigma}_{s,i}\bar{\phi}_i^{hom} + \frac{1}{4\pi k^{hom}}\bar{\nu}\bar{\Sigma}_{f,i}\bar{\phi}_i^{hom} \quad (4.2.1.10)$$

非均質体系と均質体系における領域平均の中性子バランス式である(4.2.1.3)式と(4.2.1.10)式を見比べると、次式(領域内漏れ量が保存される)が成り立てば均質計算において非均質計算の結果(領域平均反応率、増倍率)を再現できることがわかる。

$$L_i^{hom}(\mu) = L_i^{het}(\mu) \quad (4.2.1.11)$$

さて、(4.2.1.1)式の輸送方程式は、角度中性子束に対する 1 階の微分方程式と考えることができる。そのため、この輸送方程式を解くには 1 つの束縛条件を与える必要がある。そこで、各領域内の均質体系の輸送方程式(4.2.1.9)式に対して(4.2.1.11)式を束縛条件として与えて解く。その結果、非均質計算の結果を再現する均質体系の角度中性子束の空間分布が求まる。この角度中性子束の空間分布の概念図を Figure 4.2.1.1 に示す。Figure 4.2.1.1 よりわかるように、均質体系においては各領域で別個に方程式を解いたため、領域表面で角度中性子束が不連続となる。

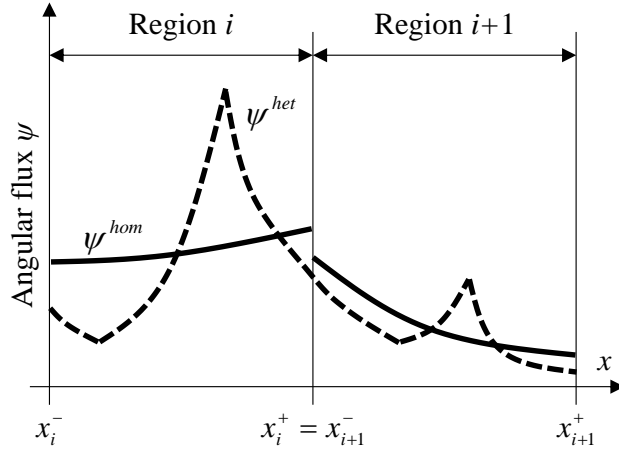


Figure 4.2.1.1 非均質計算の結果を再現する均質体系の角度中性子束の空間分布

非均質体系とこの均質体系(非均質計算の結果を再現する)の領域表面角度中性子束を用いて次式で AFDF を定義する。

$$f_{i,x_i^\pm}^{AF}(\mu) \equiv \frac{\psi^{het}(\mu, x_i^\pm)}{\psi^{hom}(\mu, x_i^\pm)} \quad (4.2.1.12)$$

非均質計算の結果を再現するときの領域表面での角度中性子束の関係は AFDF を用いて次式で表される。

$$\frac{\psi^{hom}(\mu, x_{i+1}^-)}{\psi^{hom}(\mu, x_i^+)} = \frac{\psi^{het}(\mu, x_i^+)/\psi^{hom}(\mu, x_i^+)}{\psi^{het}(\mu, x_{i+1}^-)/\psi^{hom}(\mu, x_{i+1}^-)} = \frac{f_{i,x_i^+}^{AF}(\mu)}{f_{i+1,x_{i+1}^-}^{AF}(\mu)} \quad (4.2.1.13)$$

以上が AFDF の導出である。

均質計算への適用方法

次に、AFDF を用いた均質計算について説明する。通常、輸送計算を行う際には領域表面で角度中性子束が連続であるという次の連続性に関する条件を与える。

$$\psi(\mu, x_i^+) = \psi(\mu, x_{i+1}^-) \quad (4.2.1.14)$$

しかし、この条件では非均質計算の結果を再現できない。AFDF を用いた均質計算では、領域表面において次の不連続性の条件を与える。

$$f_{i,x_i^+}^{AF}(\mu)\psi^{hom}(\mu, x_i^+) = f_{i+1,x_{i+1}^-}^{AF}(\mu)\psi^{hom}(\mu, x_{i+1}^-) \quad (4.2.1.15)$$

(4.2.1.15)式を用いることで、非均質計算の結果を再現するときの領域表面での角度中性子束の関係式である(4.2.1.13)式を満たすことができる。

AFDF は EPDF と異なり、 S_N 法や MOC 等に直接適用することができる。

以上が AFDF の理論である。AFDF の特性として注意すべきなのは、AFDF を用いた場合、中性子流が不連続となることである。拡散方程式における DF や EPDF は、領域表面の中性子の流れを保

存するように定義されるため、中性子流は連続となる。一方、AFDFは領域内漏れ量のみを保存するように定義されるため、中性子流の連続性が担保されず不連続となる。これがAFDFと拡散方程式におけるDF、EPDFの大きな違いである。なお、微積分型輸送方程式は空間に関して一階の微分方程式であり、解の自由度(未定定数)は1つである。従って、必要なDFは領域毎に1つあればよいとも思える。しかしながら、上記の導出で示したように、AFDFでは入射及び流出角度中性子束それぞれに対して個別にDFを定義する。ある領域境界に着目したとき、入射と流出角度中性子束に対するDFを用いることになるが、本質的に必要なのはこれらのDFの比である。従って、DFの数と解の自由度に矛盾は生じない。拡散方程式に対するDFについても同様の議論を適用できる。

また、AFDFの課題は、AFDFが角度依存性を持っているという点である。計算に要するメモリ量の観点から、AFDFが詳細な角度依存性を持つことは好ましくない。この課題を解決するためには、この角度依存性を関数展開等する必要があると考えられる。

4.2.2. 計算手順

本項ではAFDFの計算手順について述べる。

1次元S_N法1メッシュ

AFDFの計算手順についてのイメージを掴むため、次に示す簡単な条件でのAFDFの計算について説明する。

- 1次元平板体系、1群、固有値問題(4.2.2節と同じ問題設定)
- 均質計算をS_N法(step characteristics scheme)で行う。
- 均質化領域を1メッシュとする。

均質化領域*i*内の流入角度中性子束と流出角度中性子束は次式の関係を満たす。

$$\psi_i^{hom,out}(\mu, x_i^+) = \exp\left(-\bar{\Sigma}_{t,i}^{AF} \frac{\Delta x_i}{\mu}\right) \psi_i^{hom,in}(\mu, x_i^-) + \left\{1 - \exp\left(-\bar{\Sigma}_{t,i}^{AF} \frac{\Delta x_i}{\mu}\right)\right\} \frac{\bar{Q}_i^{hom}}{\bar{\Sigma}_{t,i}^{EP}} \quad (4.2.2.1)$$

ただし、

$$\bar{Q}_i^{hom} = \frac{1}{4\pi} \bar{\Sigma}_{s,i} \bar{\phi}_i^{hom} + \frac{1}{4\pi k^{hom}} \bar{\nu} \bar{\Sigma}_{f,i} \bar{\phi}_i^{hom} \quad (4.2.2.2)$$

である。

輸送方程式は1階の微分方程式であるため、(4.2.2.1)式に1つの束縛条件を与えなければ、未知数である入射及び流出角度中性子束は一意に定まらない。通常のS_N法では、入射角度中性子束を与えることで流出角度中性子束が決まる。一方、AFDFを計算する際には、(4.2.2.1)式に領域内漏れ量が保存されるという(4.2.1.11)式を束縛条件として与えることで、入射及び角度中性子束を求める。(4.2.1.11)式はこの問題設定において次式のように表される。

$$L_i^{hom}(\mu) = \mu \frac{\psi_i^{hom,out}(\mu) - \psi_i^{hom,in}(\mu)}{\Delta x_i} = L_i^{het}(\mu) \quad (4.2.2.3)$$

4.2.1節の導出で述べたように、この束縛条件を与えるとき、均質計算は非均質計算の結果を再現す

る。つまり、次式が成り立つ。

$$\overline{Q}_i^{hom} = \overline{Q}_i^{het} = \frac{1}{4\pi} \overline{\Sigma}_{s,i} \overline{\phi}_i^{het} + \frac{1}{4\pi k^{het}} \overline{\nu \Sigma}_{f,i} \overline{\phi}_i^{het} \quad (4.2.2.4)$$

(4.2.2.1)式、(4.2.2.3)式及び(4.2.2.4)式より、非均質計算の結果を再現するときの入射及び流出角度中性子束、つまり領域表面角度中性子束を計算できる。

$$\psi_i^{hom,in}(\mu) = \frac{\overline{Q}_i^{het}}{\overline{\Sigma}_{t,i}^{AF}} - \frac{L_i^{het}(\mu) \Delta x_i / \mu}{1 - \exp(-\overline{\Sigma}_{t,i}^{AF} \Delta x_i / \mu)} \quad (4.2.2.5)$$

$$\psi_i^{hom,out}(\mu) = \frac{\overline{Q}_i^{het}}{\overline{\Sigma}_{t,i}^{AF}} + \frac{L_i^{het}(\mu) \Delta x_i / \mu}{1 - \exp(\overline{\Sigma}_{t,i}^{AF} \Delta x_i / \mu)} \quad (4.2.2.6)$$

以上の手順で求められた均質計算の領域表面角度中性子束と非均質計算のそれを用いて、各領域表面で(2.2.1.7)式により AFDF を計算する。

以上が 1 次元 S_N 法 1 メッシュという簡単な条件での AFDF の計算手順である。

束縛条件を与えた均質計算

上記の AFDF の計算手順では、均質化領域を 1 メッシュとしたため、領域内漏れ量を保存するという束縛条件を与えた均質計算を解析的に解き、領域表面角度中性子束を解析的に計算することができた。しかし、均質化領域内を複数メッシュとする場合には、解析的に解くことは難しい。また、均質計算に輸送ノード法を用いる場合にも同様に解析的に解くことは難しい。以下に、この均質計算を解析的に解くことが難しい場合に用いる反復計算の計算手順を示す。なお、この反復計算は 4.4 節の検証計算で AFDF の計算に用いている。また、均質計算に S_N 法や MOC といった角度中性子束そのものを取り扱うタイプの計算手法を用いることを想定している。

- (1) 対称とする均質化領域において、中性子源の空間分布と入射角度中性子束が未知であるため、中性子源の空間分布と入射角度中性子束の初期値を与える。
- (2) 全ての角度について、入射角度中性子束及び中性子源から流出角度中性子束と角度中性子束の空間分布(もしくはメッシュ平均角度中性子束)を計算する。
- (3) Step (2)で得られた角度中性子束の空間分布(もしくはメッシュ平均角度中性子束)から、全中性子束の空間分布(もしくはメッシュ平均全中性子束)を計算する。さらに、得られた全中性子束を用いて中性子源の空間分布(もしくはメッシュ平均中性子源)を計算する。なお、均質化領域内での中性子源の空間積分値が非均質計算のそれと一致するように中性子源を規格化すると計算が安定する。
- (4) 入射及び流出角度中性子束は、領域内漏れ量 L が保存されるという束縛条件(4.2.1.11)式を満たさなくてはならない。そこで、非均質体系の L と Step (2)で得られた流出角度中性子束を用いて(4.2.1.11)式と(4.2.1.4)式から次の反復計算における(次の Step (2)で用いる)入射角度中性子束を計算する。
- (5) Step (2)-(4)を領域表面角度中性子束が収束するまで繰り返す。

AFDF の計算手順

次に AFDF の全体的な計算手順を以下に示す。

- (1) 非均質輸送計算を行う。
- (2) Step (1)の結果より均質化断面積、均質化領域表面の角度中性子束と均質化領域内の漏れ量を計算する。
- (3) Step (2)で得た領域内漏れ量を束縛条件として与えた均質計算を各均質化領域において行う。この均質計算については上で述べた。
- (4) Step (3)の結果より、均質体系における均質化領域表面の角度中性子束を計算する。
- (5) Step (2)と(4)で得た均質化領域表面の角度中性子束の比をとることで AFDF を計算する。

4.3. 均質化全断面積の角度依存性の取り扱い

本節では均質化全断面積の角度依存性の取り扱いについて説明する。4.2.1 項及び 4.2.2 項では EPDF と AFDF の導出を、それぞれ even-parity 角度中性子束と角度中性子束重みの均質化全断面積を用いて行った。これらの均質化全断面積は角度依存性を持つが、計算に要するメモリ量の観点から断面積が角度依存性を持つことは好ましくない。この問題を解決するため、角度依存性を持たない全中性子束重みの均質化全断面積を用いて AFDF 及び EPDF を計算することを考える。なお、以降では even-parity 角度中性子束、角度中性子束及び全中性子束重みの均質化全断面積をそれぞれ EPXS、AFXS 及び SFXS と呼ぶ[†]。

まず、SFXS を用いて AFDF を計算することを考える。非均質体系の輸送方程式を均質化領域内で体積積分した(4.2.1.3)式について考える。

$$L_i^{het}(\mu) + \bar{\Sigma}_{t,i}^{AF}(\mu)\bar{\psi}_i^{het}(\mu) = \frac{1}{4\pi} \bar{\Sigma}_{s,i} \bar{\phi}_i^{het} + \frac{1}{4\pi k^{het}} \bar{v} \bar{\Sigma}_{f,i} \bar{\phi}_i^{het} \quad (\text{再掲}) (4.2.1.3)$$

(4.2.1.3)式を全立体角で積分することで次式を得る。

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 d\mu L_i^{het}(\mu) + \bar{\Sigma}_{t,i} \bar{\phi}_i^{het} = \bar{\Sigma}_{s,i} \bar{\phi}_i^{het} + \frac{1}{k^{het}} \bar{v} \bar{\Sigma}_{f,i} \bar{\phi}_i^{het} \quad (4.3.1)$$

ただし、次の関係を用いた。

$$\phi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 d\mu \psi(\mu) \quad (4.3.2)$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 d\mu \bar{\Sigma}_{t,i}^{AF}(\mu) \bar{\psi}_i^{het}(\mu) = \bar{\Sigma}_{t,i} \bar{\phi}_i^{het} \quad (4.3.3)$$

ここで、SFXS を用いた均質体系の輸送方程式は次式で表される。

$$\mu \frac{d\psi^{hom}(\mu, x)}{dx} + \bar{\Sigma}_{t,i} \psi^{hom}(\mu, x) = \frac{1}{4\pi} \bar{\Sigma}_{s,i} \phi^{hom}(x) + \frac{1}{4\pi k^{hom}} \bar{v} \bar{\Sigma}_{f,i} \phi^{hom}(x) \quad (4.3.4)$$

(4.2.1.9)式と(4.3.4)式の違いは均質化全断面積が角度依存性を持っているかいないかである。(4.3.4)式を全立体角で積分することで次式を得る。

[†] EPXS: Homogenized total cross section weighted by even-parity angular flux,
 AFXS: Homogenized total cross section weighted by angular flux,
 SFXS: Homogenized total cross section weighted by scalar flux

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 d\mu L_i^{hom}(\mu) + \bar{\Sigma}_{t,i} \bar{\phi}_i^{hom} = \bar{\Sigma}_{s,i} \bar{\phi}_i^{hom} + \frac{1}{k^{ho}} \bar{\nu} \bar{\Sigma}_{f,i} \bar{\phi}_i^{hom} \quad (4.3.5)$$

(4.3.1)式と(4.3.5)式を見比べることで、非均質計算の結果を均質計算で再現するためには、領域内漏れ量が保存されるという(4.2.1.11)式が成り立てば良いことがわかる。

$$L_i^{hom}(\mu) = L_i^{het}(\mu) \quad (\text{再掲}) (4.2.1.11)$$

つまり、AFXS の代わりに SFXS を用いるときでも AFDF を計算するために与える束縛条件は同じである。よって、4.2.1 節で述べた AFXS を用いた AFDF の理論をそのまま SFXS を用いた場合にも適用できることがわかる。SFXS を用いた AFDF は、4.2.1 節と 4.2.2 節中の AFXS を SFXS に置き換えて考えることで計算することができる。

EPDF についても上記と同様の考え方をを用いることで、EPXS の代わりに SFXS を用いることができることを示せる。

以上より、角度依存性のない全中性子束重みの均質化断面積 SFXS を用いた EPDF 及び AFDF を計算できることがわかった。なお、AFXS を用いた AFDF と EPXS を用いた EPXS はそれぞれ領域平均角度中性子束と領域平均 even-parity 角度中性子束を再現するが、SFXS を用いた AFDF と EPDF は領域平均全中性子束のみを再現する。従って、SFXS を用いた場合、各角度の反応率を再現することができない。

4.4. 検証計算

本節では 4.2 節で提案した輸送方程式における DF である Angular flux discontinuity factor (AFDF) の検証を行う。また、4.4 節で述べた均質化全断面積の角度依存性が計算精度に与える影響についても検証する。検証計算体系は集合体が 2 つ隣接した 1 次元平板カラーセット体系である。検証の内容を以下に示す。

- AFDF の理論の妥当性の検証
 - Reference の結果から計算された AFDF を用いた均質計算が Reference の結果を再現できるかを確認する。
- AFDF の pin-by-pin 均質化への適用性
 - 単一集合体体系の結果から計算された AFDF をカラーセット体系の均質計算に用いることで均質化誤差を低減できるかを確認する。
- 均質化全断面積の角度依存性が計算精度に与える影響についての検証
 - even-parity 角度中性子束、角度中性子束及び全中性子束重みの均質化全断面積を用いた均質計算の計算精度を比較する。

4.4.1 項では検証計算の内容(目的、流れなど)と条件(計算体系、計算条件など)について説明する。

4.4.2 項では検証計算の結果を示し、それについての考察を行う。

4.4.1. 検証計算の内容と条件

検証計算の内容(目的、流れなど)と条件(計算体系、計算条件など)について説明する。本項の検証計算では Reference DF (Ref-DF) と Single Assembly DF (SA-DF) についての検証を行う。Ref-DF 及び SA-

DF の定義とその検証の内容及び目的は次の通りである。

• **Reference DF (Ref-DF)**

- **定義:** Ref-DF は reference とする非均質計算の結果(本検証計算ではカラーセット体系の結果)から計算された DF である。Ref-DF は近似をまったく含んでいない。
- **検証の内容及び目的:** Ref-DF を用いた均質計算は reference の非均質計算の結果を完全に再現するはずである。そこで、Ref-AFDF を用いた均質計算がこれを満たすか確認することで、AFDF の理論の妥当性を確認する。

• **Single Assembly DF (SA-DF)**

- **定義:** SA-DF は完全反射境界条件を仮定した単一集合体体系での非均質計算の結果から計算された DF である。SA-DF は reference とする体系で評価された Ref-DF の近似である。
- **検証の内容及び目的:** カラーセット体系の pin-by-pin 均質計算に SA-AFDF を用いることで均質化誤差が低減されるか検証する。この結果より AFDF の pin-by-pin 均質化への適用性を評価する。

また、均質化全断面積の角度依存性が計算精度に与える影響についての検証についても検証を行う。内容としては、even-parity 角度中性子束、角度中性子束及び全中性子束重みの均質化全断面積を用いた均質計算の計算精度の比較を行う。

検証計算体系は 1 次元平板カラーセット体系である。検証を行ったカラーセット体系を Figure 4.4.1.1 に示す。燃料領域と減速材領域の幅はそれぞれ 0.6 cm と 0.45 cm であり、単位セルの大きさは 1.5 cm である。カラーセット体系 No. 1 は集合体 2 に制御棒が含まれており、非均質性の強い体系となっている。カラーセット体系 No.2 は UO₂ と MOX の燃料集合体が隣接しており、スペクトル干渉効果の強い体系となっている。

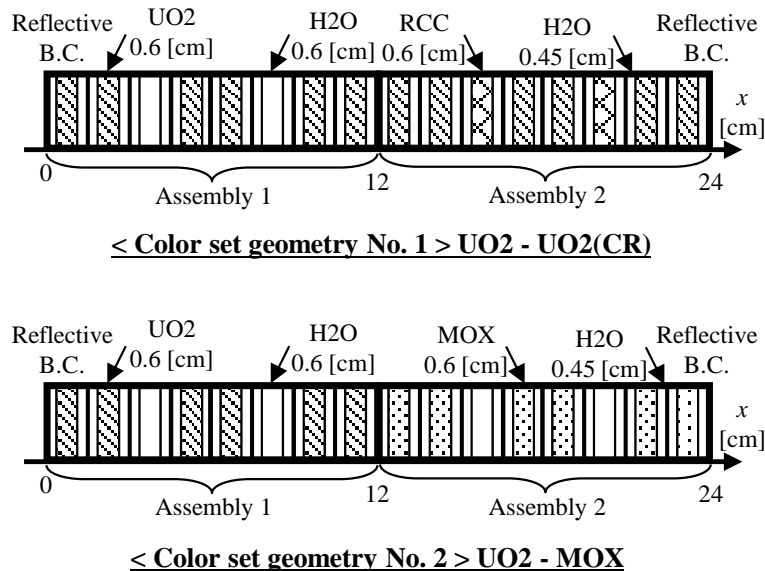


Figure 4.4.1.1 検証を行ったカラーセット体系

検証計算のエネルギー群数は 2 群で固有値問題である。計算に用いる断面積を Table 4.4.1.1 に示す。ただし、この断面積は C5G7 ベンチマーク問題の 7 群断面積を 2 群に縮約したものである[24]。なお、表中の 1 群と 2 群はそれぞれ高速群と熱群を示している。

Table 4.4.1.1 計算に用いる断面積

Material	Group	$\Sigma_{s,1\rightarrow}$ [1/cm]	$\Sigma_{s,2\rightarrow}$ [1/cm]	$v\Sigma_f$ [1/cm]	Σ_t [1/cm]	$\chi[-]$
UO2	1	3.3155E-01	4.5853E-05	1.1842E-02	3.4834E-01	1.0000E+00
	2	4.0433E-04	2.8241E-01	2.3947E-01	4.1459E-01	0.0000E+00
MOX	1	3.3531E-01	1.1805E-04	2.1063E-02	3.5609E-01	1.0000E+00
	2	3.4291E-04	2.8289E-01	4.4917E-01	6.5998E-01	0.0000E+00
H2O	1	3.7220E-01	2.5437E-05	0.0000E+00	4.1319E-01	0.0000E+00
	2	4.0648E-02	1.4769E+00	0.0000E+00	1.4955E+00	0.0000E+00
RCC	1	4.9952E-01	3.5658E-05	0.0000E+00	5.4021E-01	0.0000E+00
	2	5.7629E-05	3.8079E-01	0.0000E+00	1.3333E+00	0.0000E+00

検証計算には S_N 法(step characteristics scheme)に基づく自作コードを用いる。非均質計算と均質計算の両方で空間メッシュの幅を 0.05 cm と十分小さく設定した。これは空間離散化による誤差を排除し、DF の影響のみに着目するためである。なお、均質計算にノード法を適用する代わりに、均質計算においても空間メッシュを十分小さく設定している。角度分割数は 16 ($0 \leq \theta \leq \pi$) で Gauss-Legendre 分点を用いる。収束判定条件は k_{eff} と全中性子束ともに $1E-10$ である。

検証計算手順を以下に示す。

- (1) カラーセット体系で非均質計算を行う。この結果を reference とする。
- (2) Step (1)の結果から領域表面角度中性子束を求める。また、Step (1)の結果を用いて pin-by-pin 均質化を行い、均質化断面積と(4.2.1.4)式で定義される領域内漏れ量 L を各ピンセルで計算する。
- (3) 各均質化セルにおいて、4.2.2 節で説明した領域内漏れ量 L が Step (2)で得られた L と等しいという束縛条件を与えられた均質計算を行う。この均質計算と Step (2)で得られた領域表面角度中性子束の比より、Ref-AFDF を計算する。
- (4) カラーセット体系を構成する各々の集合体について、完全反射境界条件を仮定した単一集合体体系で非均質計算を行う。
- (5) Step (4)の結果から領域表面角度中性子束を求める。また、Step (4)の結果を用いて pin-by-pin 均質化を行い、均質化断面積と(4.2.1.4)式で定義される領域内漏れ量 L を各ピンセルで計算する。
- (6) 各均質化セルにおいて、4.2.2 節で説明した領域内漏れ量 L が Step (5)で得られた L と等しいという束縛条件を与えられた均質計算を行う。この均質計算と Step (5)で得られた領域表面角度中性子束の比より、SA-AFDF を計算する。
- (7) pin-by-pin 均質化されたカラーセット体系において Ref-AFDF または SA-AFDF を用いた均質計算を行う。このとき、均質化断面積には Step (2)で得られた reference の均質化断面積を用いる。
- (8) Step (1)と(7)の結果を比較する。

なお、Step (7)で SA-DF を用いた均質計算においても reference 均質化断面積を用いるのは、均質化断面積そのものの誤差を排除するためである。

AFDF の結果と比較するため EPDF についても同様の検討を行う。EPDF の検証計算の手順をいかに示す。

- (1) カラーセット体系で非均質計算を行う。この結果を reference とする。
- (2) Step (1)の結果から領域表面 even-parity 角度中性子束 ϕ^e と odd-parity 角度中性子束 ϕ^o を求める。
また、Step (1)の結果を用いて pin-by-pin 均質化を行い、均質化断面積を各ピンセルで計算する。

- (3) 各均質化セルにおいて、4.1.2 節で説明した領域表面 ϕ^o が Step (2) で得られた領域表面 ϕ^e と等しいという束縛条件を与えられた均質計算を行う。この均質計算と Step (2) で得られた領域表面 ϕ^e の比より、Ref-EPDF を計算する。
- (4) カラーセット体系を構成する各々の集合体について、完全反射境界条件を仮定した単一集合体体系で非均質計算を行う。
- (5) Step (4) の結果から領域表面 ϕ^e 及び ϕ^o を求める。また、Step (4) の結果を用いて pin-by-pin 均質化を行い、均質化断面積を各ピンセルで計算する。
- (6) 各均質化セルにおいて、4.1.2 節で説明した領域表面 ϕ^o が Step (5) で得られた領域表面 ϕ^e と等しいという束縛条件を与えられた均質計算を行う。この均質計算と Step (5) で得られた領域表面 ϕ^e の比より、SA-EPDF を計算する。
- (7) pin-by-pin 均質化されたカラーセット体系において Ref-EPDF または SA-EPDF を用いた均質計算を行う。このとき、均質化断面積には Step (2) で得られた reference の均質化断面積を用いる。
- (8) Step (1) と (7) の結果を比較する。

比較のため、拡散計算でも同様の検討を行う。拡散方程式における DF (DifDF) は上記の AFDF 及び EPDF と同様の手順で計算され、Step (7) の均質計算で同様に reference の均質化断面積を用いる。なお、全中性子束重みの均質化全断面積 Σ_t を用いて拡散係数 \bar{D} を $\bar{D} = 1/3\Sigma_t$ で計算している。

4.4.2. 結果と考察

本項では検証計算の結果を示し、その考察を行う。

Reference DF

Ref-DF の検証結果と考察を示す。Ref-DF を用いたときの k_{eff} とセル平均全中性子束の均質化誤差を Table 4.4.2.1 に示す。Table 4.4.2.1 より、AFXS 及び SFXS それぞれに対応する Ref-AFDF を用いることで均質化誤差を完全に取り除けていることがわかる。この結果より、AFDF の理論の妥当性を確認できる。

Table 4.4.2.1 カラーセット体系 No. 1 での keff とセル平均全中性子束の均質化誤差(Ref-DF)

Calculation	DF	Homogenized XS	keff [-] keff error [%]	Scalar flux RMS error [%]	
				Scalar flux max error [%]	
				Group 1	Group 2
Reference	-	-	1.03030	-	-
Transport	Ref-AFDF	AFXS	1.03030 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00
Transport	Ref-AFDF	SFXS	1.03030 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00
Transport	Ref-EPDF	EPXS	1.03030 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00
Transport	Ref-EPDF	SFXS	1.03030 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00
Diffusion	Ref-DifDF	SFXS	1.03030 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00

AFXS: Homogenized total cross section weighted by angular flux

EPXS: Homogenized total cross section weighted by even-parity angular flux

SFXS: Homogenized total cross section weighted by scalar flux

Error: Relative difference = (Homo. – reference) / reference

RMS: Root mean square

Single Assembly DF

SA-DF の検証結果と考察を示す。カラーセット体系 No. 1 で SA-DF を用いたときの keff とセル平均全中性子束の均質化誤差を Table 4.4.2.2 に示す。Table 4.4.2.2 より次のことがわかる。

(vi) Case A (No DF and AFXS) と D (SA-AFDF and AFXS) の結果を比べると、SA-AFDF を用いることで均質化誤差が大幅に低減されていることがわかる。SA-AFDF を用いても均質化誤差を完全に取除くことができないのは、reference AFDF と異なり SA-AFDF は単一集合体体系で評価されることより、集合体が隣接する効果を考慮できていないためである。SFXS を用いた Case C (No DF and SFXS) と E (SA-AFDF and SFXS) でも同様に SA-AFDF を用いることで均質化誤差が大幅に低減されていることがわかる。

(vii) Case D (SA-AFDF and AFXS)、E (SA-AFDF and SFXS)、F (SA-EPDF and EPXS) 及び G (SA-EPDF and SFXS) の結果より、SA-EPDF は SA-AFDF よりも均質化誤差を低減できていることがわかる。これは、AFDF と EPDF の特性の違いに起因していると考えられる。AFDF は領域内漏れ量を保存するように定義され、EPDF は領域表面の流れを保存するように定義される。そのため、EPDF は AFDF よりも隣接領域の相互作用をうまく考慮でき、その結果、境界条件の変化に対する DF の変化が小さくなる可能性がある。これが SA-AFDF と SA-EPDF の均質化誤差低減量に影響を与えている可能性がある。

(viii) Case A-G の結果より、このカラーセット体系では均質化断面積の角度依存性が均質化誤差にあまり影響しないことがわかる。角度依存性のない均質化断面積を用いる場合、角度中性子束に対す

る反応率の再現性は低い。しかし、今回の検証のように k_{eff} や全中性子束に対する反応率などのより巨視的な量に着目する場合、角度中性子束に対する反応率の誤差はキャンセルアウトされ、結局、均質化断面積の角度依存性は均質化誤差に与える影響が小さくなると考えられる。

- (ix) Case H (Diffusion calculation with SA-DifDF)と A-C (Transport calculations with No DF)の結果を比べると、拡散計算の方が reference の結果との差異が小さいことがわかる。この結果より、DF などの均質化誤差低減パラメータを用いない場合、拡散計算に対する輸送計算の優位性はなくなってしまうことがわかる。つまり、均質計算に輸送計算を適用する場合、DF 等を適用することが必須であると言える。

Table 4.4.2.2 カラーセット体系 No. 1 での k_{eff} とセル平均全中性子束の均質化誤差(SA-DF)

Case	Calculation	DF	Homogenized XS	k_{eff} keff error [%]	Scalar flux RMS error [%]	
					Scalar flux max error [%]	
					Group 1	Group 2
-	Reference	-	-	1.03030	-	-
A	Transport	No DF	AFXS	1.02921	1.79	3.18
				-0.11	3.20	6.25
B	Transport	No DF	EPXS	1.02941	1.81	3.21
				-0.09	3.25	6.31
C	Transport	No DF	SFXS	1.03170	1.80	3.10
				0.14	3.27	5.99
D	Transport	SA-AFDF	AFXS	1.02996	0.24	0.44
				-0.03	0.59	1.03
E	Transport	SA-AFDF	SFXS	1.03027	0.19	0.35
				0.00	0.43	0.75
F	Transport	SA-EPDF	EPXS	1.03053	0.11	0.20
				0.02	0.24	0.47
G	Transport	SA-EPDF	SFXS	1.03085	0.13	0.24
				0.05	0.32	0.56
H	Diffusion	No DF	SFXS	1.02967	3.25	5.38
				-0.06	6.50	10.25
I	Diffusion	SA-DifDF	SFXS	1.03053	0.72	0.45
				0.02	1.32	1.11

カラーセット体系 No. 1 のセル平均中性子束の相対差異の空間分布を Figure 4.4.2.1-Figure 4.4.2.6 に示す。Figure 4.4.2.1-Figure 4.4.2.6 より次のことがわかる。

- (i) いずれの結果においても、集合体 1 の減速材のみのセルと集合体 2 の RCC のセル付近で均質化誤差が特に大きくなっている。これは、これらの領域が体系の中で特に非均質性の強い領域であるためである。
- (ii) いずれの結果においても、高速群よりも熱群の中性子束の均質化誤差が大きくなっている。非均

質性の強い集合体 1 の減速材のみのセルと集合体 2 の RCC のセルでは高速群よりも熱群の中性子束が大きく変化する。そのため、均質化誤差の影響が熱群に大きく現れていると考えられる。

(iii) DF を用いない輸送計算と拡散計算の誤差分布を比較すると、分布の傾向は同じで誤差の大きさが異なっている。

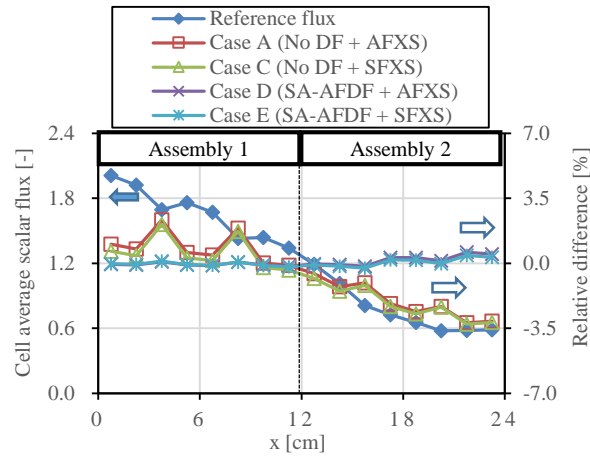


Figure 4.4.2.1 1 群セル平均中性子束とその相対差異の空間分布(カラーセット体系 No. 1, AFDF)

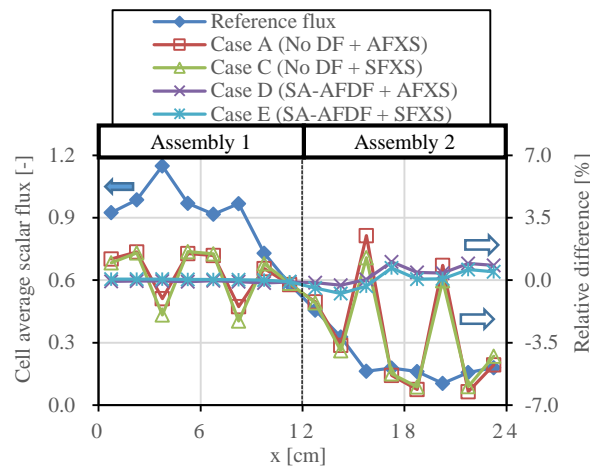


Figure 4.4.2.2 2 群セル平均中性子束とその相対差異の空間分布(カラーセット体系 No. 1, AFDF)

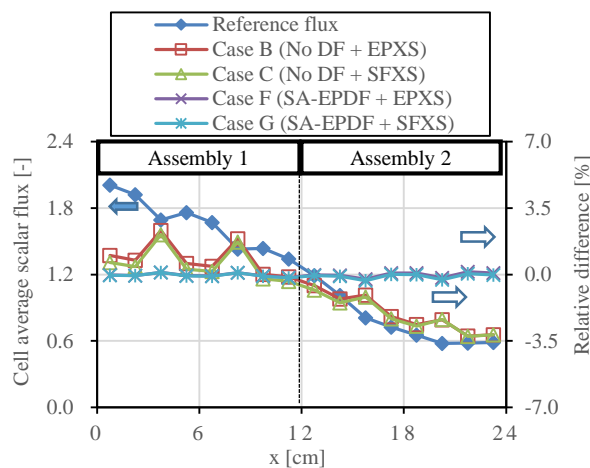


Figure 4.4.2.3 1 群セル平均中性子束とその相対差異の空間分布(カラーセット体系 No. 1, EPDF)

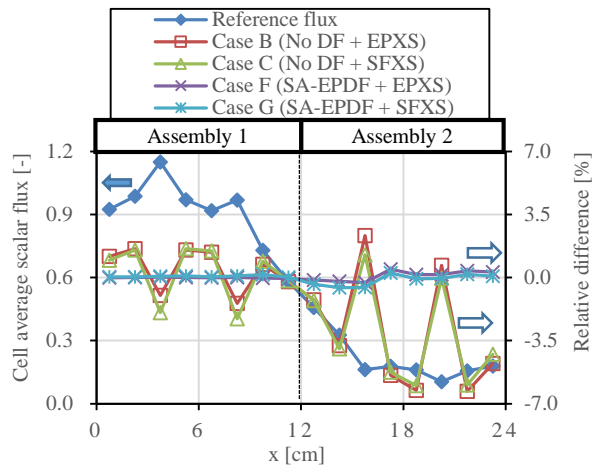


Figure 4.4.2.4 2群セル平均中性子束とその相対差異の空間分布(カラーセット体系 No. 1, EPDF)

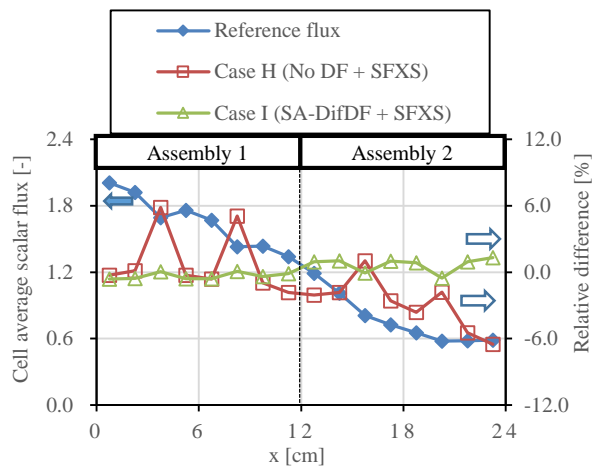


Figure 4.4.2.5 1群セル平均中性子束とその相対差異の空間分布(カラーセット体系 No. 1, DifDF)

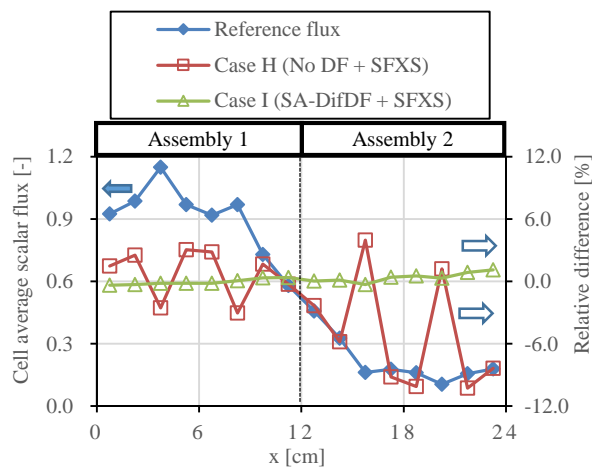


Figure 4.4.2.6 2群セル平均中性子束とその相対差異の空間分布(カラーセット体系 No. 1, DifDF)

Table 4.4.2.2 に対する観察(i)で述べたように、Ref-AFDF と異なり SA-AFDF は均質化誤差を完全に
取り除くことはできない。Ref-AFDF と SA-AFDF の違いについて議論するため、Cell 5 (Assembly 1 の
左から 5 番目のセル, $6.0 \leq x \leq 7.5$) の右側表面と Cell 12 (Assembly 2 の左から 4 番目のセル, $16.5 \leq x \leq$
 18.0) の左側表面の熱群の Ref-AFDF と SA-AFDF をそれぞれ Figure 4.4.2.7 と Figure 4.4.2.8 に示す。た

だし、図中の Direction cosine μ は x 軸との方向余弦($\mu=0$ が x 軸正方向、 $\mu=0$ が x 軸負方向)を表しており、 μ に対する AFDF は角度 μ の角度中性子束に対する AFDF を示す。Figure 4.4.2.7 と Figure 4.4.2.8 より次のことがわかる。

- (i) 入射角度中性子束に対する AFDF(Figure 4.4.2.7 の $-1 \leq \mu \leq 0$, Figure 4.4.2.8 の $0 \leq \mu \leq 1$)よりも流出角度中性子束に対する AFDF(Figure 4.4.2.7 の $0 \leq \mu \leq 1$, Figure 4.4.2.8 の $-1 \leq \mu \leq 0$)の方が、Ref-AFDF と SA-AFDF が良く一致していることがわかる。ここでは示さないが、その他のセル表面でも同様の傾向が見られた。そもそも、Ref-AFDF と SA-AFDF で差異が生まれるのは、AFDF を計算する体系の境界条件(中性子の流入量等)が異なるためである。これを踏まえると、流出角度中性子束に対する AFDF は入射角度中性子束に対する AFDF よりも境界条件の変化にロバストであるといえる。これは入射角度中性子束と流出角度中性子束の値が決まる要因が異なることが原因であると考えられる。入射角度中性子束は、隣接領域から入射してくる角度中性子束によって決まるため、境界条件の変化に影響を受けやすいと考えられる。一方、流出角度中性子束は領域内で減衰した入射角度中性子束とその領域内の中性子源によって決まる。境界条件の変化に敏感な入射角度中性子束は減衰により影響が小さくなり、また領域内の中性子源は入射角度中性子束よりも境界条件の変化に敏感でないと考えられる。そのため、流出角度中性子束の境界条件に対する依存性は入射角度中性子束より弱くなり、境界条件の変化によりロバストになると考えられる。
- (ii) Direction cosine μ の絶対値が小さくなるに従い、AFDF が 1 から離れる、つまり非均質体系と均質体系の領域表面角度中性子束の差異が大きくなる傾向が見られる。他のセル表面でも同様の傾向(1 より小さくなっていく場合もある)が見られた。これは μ が小さいと中性子が領域内を通過する距離が長くなる、つまり中性子から見てセルの幅が大きくなることに相当し、そのぶん非均質と均質の違いが顕著に現れるからだと考えられる。
- (iii) AFXS と SFXS に対する AFDF は μ に対する傾向が似ているが、値は異なっている。これは、各角度 μ において AFXS と SFXS で値が異なるためである。Cell 12 における reference の熱群均質化全断面積を Figure 4.4.2.9 に示す。Figure 4.4.2.7 と Figure 4.4.2.8 を見比べると、AFXS と SFXS が近い値であるほど AFXS と SFXS に対する Ref-AFDF が近い値をとっていることがわかる。

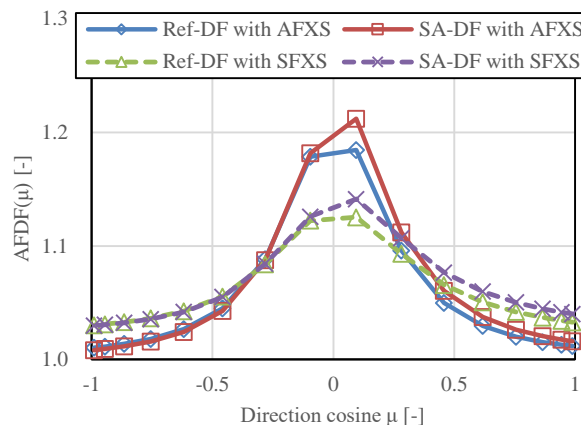


Figure 4.4.2.7 カラーセット体系 No. 1 のセル 5 (集合体 1 の左から 5 番目のセル、 $6.0 \leq x \leq 7.5$) 右側境界の AFDF

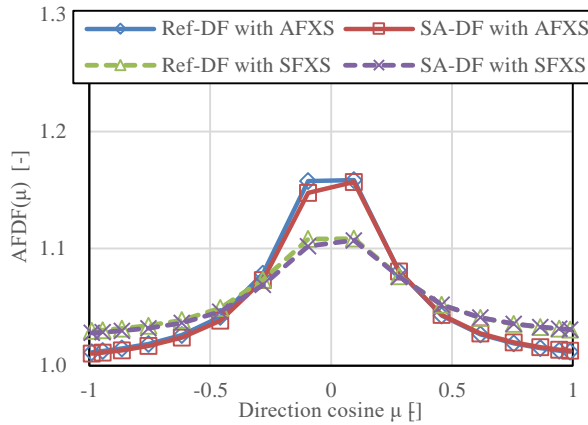


Figure 4.4.2.8 カラーセット体系 No. 1 のセル 12(集合体 2 の左から 4 番目のセル、 $16.5 \leq x \leq 18.0$)の左側境界の AFDF

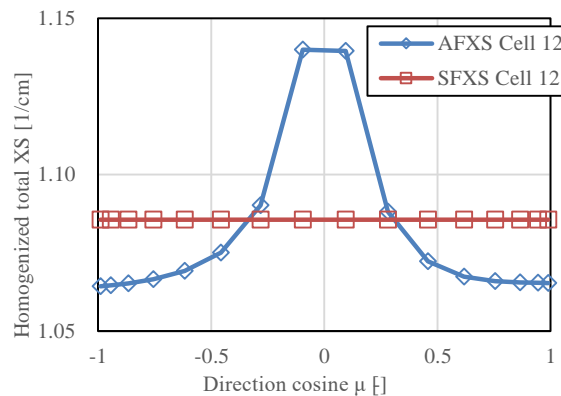


Figure 4.4.2.9 カラーセット体系 No. 1 のセル 12(集合体 2 の左から 4 番目のセル、 $16.5 \leq x \leq 18.0$)の 2 群 reference 均質化全断面積

カラーセット体系 No. 2 で SA-DF を用いたときの k_{eff} とセル平均全中性子束の均質化誤差を Table 4.4.2.3 に示す。Table 4.4.2.3 より次のことがわかる。

- (i) Table 4.4.2.2 と同様に、Case A (No DF and AFXS) と D (SA-AFDF and AFXS) の結果を比べると、SA-AFDF を用いることで均質化誤差が大幅に低減されていることがわかる。SFXS を用いた Case C (No DF and SFXS) と E (SA-AFDF and SFXS) でも同様に SA-AFDF を用いることで均質化誤差が大幅に低減されていることがわかる。
- (ii) Table 4.4.2.2 と同様に、Case D (SA-AFDF and AFXS)、E (SA-AFDF and SFXS)、F (SA-EPDF and EPXS) 及び G (SA-EPDF and SFXS) の結果より、SA-EPDF は SA-AFDF よりも均質化誤差を低減できていることがわかる。
- (iii) Case A-G の結果より、 UO_2 燃料で構成されるカラーセット体系 No. 1 と比べて UO_2 と MOX 燃料で構成されるカラーセット体系 No. 2 では均質化全断面積の角度依存性が均質化誤差に与える影響が大きいことがわかる。これは、MOX 燃料の方が UO_2 燃料よりも全断面積が大きいことに起因していると考えられる。定性的に考えると、全断面積が大きいほど角度中性子束の減衰量の角度依存性が大きくなる、つまり領域内の角度中性子束の角度依存性が大きくなる。そのため、非均質体系で燃料領域の全断面積が大きいセルほど均質化全断面積の角度依存性が大きくなり、

それが計算精度に与える影響も大きくなると考えられる。ここで、Figure 4.4.2.10 にカラーセット体系 No. 2 の Cell 1 (UO₂ セル) と Cell 16 (MOX セル) での均質化全断面積の角度依存性 (AFXS / SFXS) を示す。Figure 4.4.2.10 よりわかるように、上記の考察の通り燃料の全断面積が大きいほど均質化全断面積の角度依存性が大きいことがわかる。以上より、カラーセット体系 No. 2 ではカラーセット体系 No. 1 よりも均質化全断面積の角度依存性が計算精度に与える影響が大きかったのは、カラーセット体系 No. 2 は全断面積の大きい MOX 燃料で構成されているためであると言える。

Table 4.4.2.3 カラーセット体系 No. 2 での k_{eff} とセル平均全中性子束の均質化誤差 (SA-DF)

Case	Calculation	DF	Homogenized XS	k_{eff} k_{eff} error [%]	Scalar flux RMS error [%]	
					Scalar flux max error [%]	
					Group 1	Group 2
-	Reference	-	-	1.1132	-	-
A	Transport	No DF	AFXS	1.1151 0.18	0.67 0.91	2.19 5.55
B	Transport	No DF	EPXS	1.1151 0.18	0.68 0.95	2.16 5.50
C	Transport	No DF	SFXS	1.1168 0.33	0.79 0.98	2.65 6.64
D	Transport	SA-AFDF	AFXS	1.1116 -0.14	0.26 0.44	0.34 0.97
E	Transport	SA-AFDF	SFXS	1.1117 -0.13	0.37 0.60	0.55 1.25
F	Transport	SA-EPDF	EPXS	1.1134 0.02	0.25 0.37	0.24 0.30
G	Transport	SA-EPDF	SFXS	1.1137 0.05	0.37 0.57	0.51 0.71

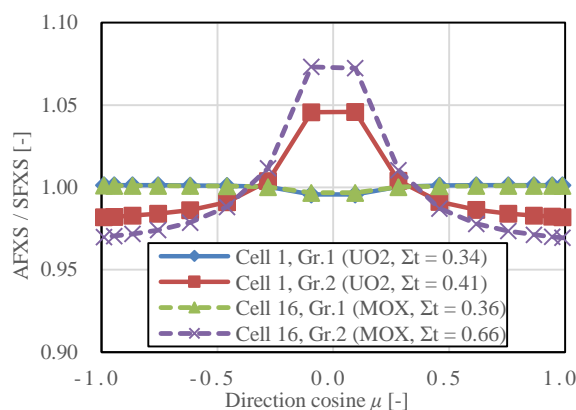


Figure 4.4.2.10 カラーセット体系 No. 2 の Cell 1 (集合体 1 の左から 1 番目のセル) と Cell 16 (集合体 2 の左から 8 番目のセル) での AFXS / SFXS

以上を総合すると次の結論が得られる。

- SA-AFDF を用いることで均質化誤差を大幅に低減できた。このことより、AFDF の pin-by-pin 均質化への適用性を確認した。
- EPDF は AFDF よりも均質化誤差低減量が大きかった。このことより、EPDF の方が DF を計算する体系的境界条件の変化(単一集合体体系→カラーセット体系)に対してロバストであると言える。
- 均質計算の計算精度は、(1)輸送計算+DF、(2)拡散計算+DF、(3)輸送計算、(4)拡散計算の順に良かった。この結果より、拡散近似による誤差よりも均質化誤差が計算精度に与える影響の方が大きいことがわかる。また、DF を用いる拡散計算が DF を用いない輸送計算より精度が良いことより、均質輸送計算を行う際には DF 等の均質化誤差低減パラメータを用いることが必須であることがわかる。
- UO₂-MOX カラーセット体系では UO₂-UO₂(CR)カラーセット体系よりも均質化全断面積の角度依存性が計算精度に与える影響が大きかった。これは、MOX 燃料は UO₂ 燃料よりも全断面積が大きく、角度中性子束の角度依存性が大きくなるためである。しかし、どちらの体系でも均質化全断面積の角度依存性が計算精度に与える影響はそれほど大きくなかった。均質化全断面積の角度依存性を考慮すべきかどうかは、全断面積の大きさによって決まると言える。

4.5. 本章のまとめ

本章では、微積分型輸送方程式における DF の説明及び提案を行い、その検証を行った。4.1 節では過去に提案された輸送方程式における DF である even-parity angular flux discontinuity factor (EPDF) について述べた。4.2 節では本研究で提案する angular flux discontinuity factor (AFDF) について述べた。4.3 節では、均質化全断面積の角度依存性の取り扱いについて述べた。4.4 節では AFDF の検証と均質化全断面積の角度依存性が計算精度に与える影響についての検証を行った。以下に各節の簡単なまとめを記す。

4.1 節では過去に提案された微積分型輸送方程式における DF である even-parity angular flux discontinuity factor (EPDF) の説明を行った。以下に重要な事柄を記す。

- EPDF は領域表面で odd-parity 角度中性子束が保存されるように定義される。odd-parity 角度中性子束は中性子の流れに関する量であり、例えば拡散方程式での中性子流に対応する。
- EPDF は even-parity 角度中性子束に対して適用され、領域表面で even-parity 角度中性子束を不連続とする。
- S_N 法等の角度中性子束をそのまま取り扱う計算手法には EPDF を直接適用できない。例えば、S_N 法に適用する際には次式に示すような不連続性の式を用いる。

$$\psi^{hom}(\mu, x_{i+1}^-) = \frac{f_{i,x_i^+}^{EP} / f_{i+1,x_{i+1}^-}^{EP} + 1}{2} \psi^{hom}(\mu, x_i^+) + \frac{f_{i,x_i^+}^{EP} / f_{i+1,x_{i+1}^-}^{EP} - 1}{2} \psi^{hom}(-\mu, x_i^+) \quad (\text{再掲}) (4.1.1.27)$$

- EPDF の課題は、EPDF が角度依存性を持っているという点である。計算に要するメモリ量の観点から、EPDF が角度依存性を持つことは好ましくない。この課題を解決するためには、

この角度依存性を関数展開等する必要があると考えられる。

また、(4.1.1.27)式を適用するためには、領域境界で逆方向の角度中性子を使用する必要がある、これを保持しておく必要がある。MOC 等では、中性子の飛行方向に計算を行うことで、領域表面(体系の境界を除く)における角度中性子を保存する必要を排除しており、これにより必要なメモリ量を大幅に削減している。EPDF を大型体系において直接適用する場合には、この点についても問題を解決しなければならない。

4.2 節では本研究で提案する微積分型輸送方程式における DF である angular flux discontinuity factor (AFDF)の説明を行った。以下に重要な事柄を記す。

- AFDF は領域内漏れ量が保存されるように定義される。
- AFDF は角度中性子束に対して適用され、領域表面で角度中性子束を不連続とする。
- EPDF と異なり、AFDF は次式のように S_N 法等に直接適用することができる。

$$f_{i,x_i^+}^{AF}(\mu)\psi^{hom}(\mu, x_i^+) = f_{i+1,x_{i+1}^-}^{AF}(\mu)\psi^{hom}(\mu, x_{i+1}^-) \quad (\text{再掲})(4.2.1.15)$$

- AFDF の特性として注意すべきなのは、AFDF を用いた場合、中性子流が不連続となることである。拡散方程式における DF や EPDF は、領域表面の中性子の流れを保存するように定義されるため、中性子流は連続となる。一方、AFDF は領域内漏れ量のみを保存するように定義されるため、中性子流の連続性が担保されず不連続となる。これが AFDF と拡散方程式における DF、EPDF の大きな違いである。
- AFDF の課題は EPDF と同じで、AFDF が角度依存性を持っているという点である。計算に要するメモリ量の観点から、AFDF が角度依存性を持つことは好ましくない。この課題を解決するためには、この角度依存性を関数展開等する必要があると考えられる。

4.3 節では均質化全断面積の角度依存性の取り扱いについて述べた。以下に重要な事柄を記す。

- 4.1 節の EPDF の導出と 4.2 節の AFDF の導出ではそれぞれ even-parity 角度中性子束重みと角度中性子束重みの均質化全断面積を用いた。しかし、角度依存性のない全中性子束重みの均質化全断面積を用いても AFDF 及び EPDF を導出することができる。
- 計算に要するメモリ量の観点から断面積が角度依存性を持つことは好ましくなく、計算精度が問題にならないのであれば全中性子束重みの均質化全断面積を用いた方が良い。

4.4 節では AFDF の検証と均質化全断面積の角度依存性が計算精度に与える影響についての検証を、1次元平板カラーセット体系で行った。以下に重要な事柄を記す。

- Reference とする非均質計算の結果より計算した AFDF を用いた均質計算が非均質計算の結果を再現したことから、AFDF の理論の妥当性を確認した。
- AFDF を pin-by-pin 均質化に適用することで均質化誤差を大幅に低減できたことより、AFDF の pin-by-pin 均質化への適用性を確認した。
- EPDF は AFDF よりも均質化誤差の低減量が大きかった。この結果より、EPDF は AFDF よりも DF を計算する体系の境界条件に対してロバストであると言える。また、AFDF は領域内漏れ量を保存するように定義され、EPDF は領域表面での中性子の流れを保存するように定義されることから、AFDF は EPDF よりも隣接領域の相互作用をうまく考慮できないと考

えられる。

- 均質計算の計算精度は、(1)輸送計算+DF、(2)拡散計算+DF、(3)輸送計算、(4)拡散計算の順に良かった。この結果より、拡散近似による誤差よりも均質化誤差が計算精度に与える影響の方が大きいことがわかる。また、DFを用いる拡散計算がDFを用いない輸送計算より精度が良いことより、均質輸送計算を行う際にはDF等の均質化誤差低減パラメータを用いることが必須であることがわかった。
- 4.4 節の検証計算の条件では均質化全断面積の角度依存性が計算精度に与える影響は小さかった。しかし、MOX燃料を含む体系はUO₂燃料のみで構成される体系よりもこの影響が大きかった。この結果より、全断面積が大きいほど角度中性子束の角度依存性が大きくなり、均質化全断面積の角度依存性が効いてくると考えられる。

第5章 結論

5.1. 結論

現在の原子炉の炉心解析では、計算コストを低減するために空間均質化が行われる。空間均質化を行うことによって、炉心計算にかかる時間を大幅に低減できるが、均質化誤差が発生し解析精度に大きな影響を与える。空間均質化に関する理論である **generalized equivalence theory (GET)**では、不連続因子(**discontinuity factor, DF**)を用いることで均質化誤差を補正する。DFは拡散方程式に基づく近代ノード法において広く用いられており、炉心解析の精度向上に大きく寄与している。しかし、高次の方程式(輸送方程式、 P_N 方程式、 SP_N 方程式)に対するDFは過去にいくつか提案されているが、まだ最近活発に研究され始めた段階である。

本論文第3章では $SP3$ 方程式におけるDFとして次の2つを提案した。

- **Individual DF:** DFは全中性子束と2次モーメントに対して適用され、領域表面中性子流と3次モーメントが保存されるように決められる。非均質計算での2次モーメントと3次モーメントはそれぞれ非均質計算の部分中性子束及び部分中性子流から推定される。
- **Unitary DF:** DFは全中性子束と2次モーメントに対して適用される。全中性子束と2次モーメントに対するDFの値が等しく、かつ領域表面中性子流が保存されるようにDFは決められる。

これらのDFのpin-by-pin均質化への適用性を2次元体系で検証した。検証の結果、どちらも均質化誤差を大幅に低減できることを確認した。低減量はどちらも同程度であったことから、計算に要するデータ量の観点からUnitary DFの方が実用的であるという結果を得た。

第4章では微積分型輸送方程式におけるDFとして**angular flux discontinuity factor (AFDF)**を提案した。AFDFは角度中性子束に対して適用され、各角度の領域内漏れ量が保存されるように決められる。AFDFのpin-by-pin均質化への適用性を1次元平板体系で検証した。検証の結果、均質化誤差を大幅に低減できることを確認した。しかし、過去に提案された**even-parity angular flux discontinuity factor (EPDF)**と比べると均質化誤差低減量は小さかった。また、均質化全断面積の角度依存性が計算精度に与える影響についても検証した。検証の結果、本論文での検証計算条件では計算精度に与える影響は小さかったが、全断面積が大きい物質を含む体系であるほどその影響が大きくなることを確認した。

5.2. 今後の課題

今後の課題及び展望を以下に示す。

- (1) 本論文ではIndividual DFとUnitary DFの検証として空間均質化による誤差のみ取り扱った。実際には、DFが空間均質化に加えてエネルギー群縮約による誤差をどれほど補正できるかも重要となる。そのため、Individual DFとUnitary DFがエネルギー群縮約による誤差をどれほど低減できるか検証する必要がある。
- (2) 反射体による輸送効果の補正にはDFが用いられる。Individual DFとUnitary DFの概念を $SP3$ 計算における反射体の輸送補正に応用できる可能性がある。
- (3) pin-by-pin均質化では計算に要するデータ量の観点からDFでなくSPH因子が一般的に用いられる。本論文のUnitary DFの検証で得られた知見を基に考えると、Improved SPH法をpin-by-pin $SP3$ 計算に適用する場合、集合体表面での不連続性を0次モーメントと2次モーメント別々に取り扱

うことで計算精度が良くなる可能性がある。

- (4) AFDF 及び EPDF は角度依存性を持っており、これは計算に要するデータ量の観点から好ましくない。そのため、角度依存性を考慮せずに済む方法を考える必要がある。1つのアイデアとしては、角度依存性を関数展開することが挙げられる。
- (5) 本論文では AFDF の検証を 1次元平板体系で行った。より実体系に近い2次元体系においても検証を行う必要がある。

参考文献

1. K.S. SMITH, "Assembly Homogenization Techniques for Light Water Reactor Analysis," *Prog. Nucl. Energy*, **17**, pp. 303-335 (1986).
2. R. SANCHEZ, "Assembly Homogenization Techniques for Core Calculations," *Prog. Nucl. Energy*, **51**, pp. 14-31 (2009).
3. A. Hebert, "A Consistent Technique for the Pin-by-pin Homogenization of a Pressurized Water Reactor Assembly," *Nucl. Sci. Eng.*, **113**, pp. 127-138 (1993).
4. A. Hebert, G. Mathonniere, "Development of a Third-Generation Superhomogenization Method for the Homogenization of Pressurized Water Reactor Assembly," *Nucl. Sci. Eng.*, **115**, pp. 129-141 (1993).
5. T. Kozlowski, Y. Xu, T. J. Downar and D. Lee, "Cell Homogenization Method for Pin-by-Pin Neutron Transport Calculations," *Nucl. Sci. Eng.*, **169**, pp. 1-18 (2011).
6. L. Yu, D. Lu, Y. A. Chao, "The Calculation Method for SP3 Discontinuity Factor and Its Application," *Ann. Nucl. Energy*, **69**, pp. 14-24 (2014).
7. A. Yamamoto, T. Endo, Y. A. Chao, "A Derivation of Discontinuity Factor for Angular Flux in Integro-Differential Transport Equation," *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **104**, pp. 815-817 (2011) [CD-ROM].
8. A. Yamamoto, T. Endo, "Assembly Discontinuity Factor for Angular Flux in Transport Calculation," *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **105**, pp. 862-864 (2011) [CD-ROM].
9. X. Hong, H. Yongming, Z. Zhiwei, "Angular Flux Discontinuity Factors for Reactor Core Transport Calculation," *Proc. PHYSOR 2010*, Pittsburg, Pennsylvania, May 9-14, 2010, American Nuclear Society (2010) [CD-ROM].
10. J.Y. Cho, H.G. Joo, S.Y. Park, S.Q. Zee, "Consistent Group Collapsing Scheme for Multi-group MOC Calculation," *Proc. PHYSOR 2002*, Seoul, Korea, Oct. 7-10, 2002, American Nuclear Society (2002) [CD-ROM].
11. Seuber A, "Pin Cell Discontinuity Factor in the Transient 3-D Discrete Ordinates code TORT-TD," *Proc. PHYSOR 2010*, Pittsburg, Pennsylvania, May 9-14, 2010, American Nuclear Society (2010) [CD-ROM].
12. 山本章夫, "拡散方程式の数値解法の基礎", 第 36 回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会, pp.47-80 (2004).
13. A. Yamamoto, M. Tatsumi, Y. Kitamura, Y. Yamane, "Improvement of the SPH Method for Pin-by-pin Core Calculations," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **41**, pp. 1155-1165 (2004).
14. 小林啓祐, *原子炉物理*, コロナ社 (1996).
15. 遠藤知弘, "P_N法と等価となる仮想中性子源の導出および検証" (personal communication).
16. E. W. Larsen, J. E. Morel, J. M. Mcghee, "Asymptotic Derivation of the Multigroup P₁ and Simplified P_N Equation with Anisotropic Scattering," *Nucl. Sci. Eng.*, **123**, pp. 328-342 (1996).
17. K. S. Smith, "Multi-Dimensional Nodal Transport Using the Simplified PL Method," *Proc. of Topical Conference On Reactor Physics and Safety*, **1**, 223, Saratoga, NY, (1986).
18. M. Tatsumi, A. Yamamoto, "Advanced Core Calculation Based on Multi-group Nodal Transport Method in Three-dimensional Pin-by-pin Core Geometry," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **40**, pp. 376-387 (2004).
19. 多田健一, "高精度 BWR 炉心核計算手法に関する研究," 名古屋大学大学院工学研究科 博士論文 (2008).

20. Y. A. Chao, A. Yamamoto, "The Explicit Representation for the Angular Flux Solution in the Simplified P_N (SP_N) Theory," *Proc. PHYSOR 2012*, Knoxville, Tennessee, April 15-20, 2012, American Nuclear Society (2012) [CD-ROM].
21. N. Z. Cho, *Benchmark Problem in Reactor and Particle Transport Physics*, <http://nurapt.kaist.ac.kr/benchmark> (2000).
22. A. Yamamoto, N. Sugimura and T. Ushio, "Calculation models of AEGIS, an advanced neutronics solver of next-generation," *Trans. Am. Nucl. Soc.*, **92**, pp. 631-632 (2005) [CD-ROM].
23. A. Yamamoto, T. Endo, M. Tabuchi, N. Sugimura, T. Ushio, M. Mori, M. Tatsumi, Y. Ohoka, "AEGIS: and Advanced Lattice Physics Code for Light Reactor Analyses," *Nucl. Eng. Technol.*, **42**, pp. 500-519 (2010).
24. Nuclear Energy Agency, *Benchmark on Deterministic Transport Calculations without Spatial Homogenization*, NEA/NSC/DOC, 16, ISBN92-64-02139-6, OECD (2003).

Appendix A. 多項式解析的ノード法(有限差分形式)

A.1 ノード法

本 Appendix では拡散方程式と SP3 方程式に対する有限差分形式の多項式解析的ノード法(semi-analytic nodal method, SANM)について説明する[A.1-A.3]。なお、本 Appendix の内容は Ref. [A.3]のノード法の資料を参考にしている。

まず、ノード法とは空間を内部が均質なノードに分割し、そのノード内で中性子束の空間分布を関数で展開する計算手法である。空間分布を関数で表すため、有限差分法と比べメッシュ誤差が非常に小さい。そのため、計算に要するメッシュ数が少なく済み、計算時間を短縮できる。ノード法は関数展開の仕方に基づいて次の4つに分けられる。

- ・ **解析的ノード法:** ノード内の中性子束分布を解析的に求める。高精度であるが、多群の場合、計算式が煩雑となる。
- ・ **多項式解析的ノード法:** ノード内で中性子源を多項式で展開した式を用いて、ノード内の中性子束分布を解析的に求める。
- ・ **多項式ノード法:** ノード内の中性子束を多項式で近似する。重み付き残差法を用いる。
- ・ **準解析的ノード法:** 2群計算に特化した方法で、1群には多項式ノード法、2群には多項式解析的ノード法を用いる。

また、反復計算時の未知数に基づいて次の2つに分けられる。

- ・ **応答行列形式:** 部分中性子流が未知数。収束性は悪いが並列計算に向いている。
- ・ **有限差分形式:** 中性子束が未知数。収束性が良い。

本論文中の検証計算で用いた自作ノード法コードでは、計算の安定性・収束性と実装の簡単さを考慮して、多項式解析的ノード法(2次多項式展開)と有限差分形式の組み合わせを用いている。

A.2 多項式解析的ノード法に基づく拡散計算

A.2.1 計算理論

本項では多項式解析的ノード法に基づく拡散計算について説明する。多項式解析的ノード法の計算式は非常に煩雑であるため、計算式の導出には Mathematica を使うことをおすすめする。

A.2.1.1 導入

多項式解析的ノード法(2次多項式展開)に基づく拡散計算の理論を簡単に説明する。簡単のため2次元体系を考える。ノード法では Figure A.1 に示すように2次元平面をノードで分割する。なお、ノード内は均質であり反応断面積が一定である。

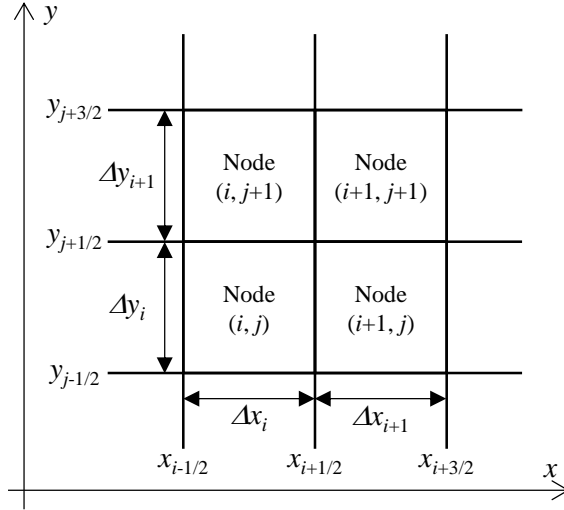


Figure A.1 2次元平面のノード分割

ノード (i, j) 内の拡散方程式は次式で表される。

$$-D_{i,j,g} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \phi_g(x, y) + \sum_{r,i,j,g} \phi_g(x, y) = Q_g(x, y) \quad (\text{A.1})$$

$$Q_g(x, y) \equiv \sum_{g' \neq g} \sum_{s,i,j,g' \rightarrow g} \phi_{g'}(x, y) + \frac{\chi_{i,j,g}}{k_{eff}} \sum_{g'} v \sum_{f,i,j,g'} \phi_{g'}(x, y) \quad (\text{A.2})$$

(A.1)式は x と y についての微分方程式であるため、解析的に取り扱うことが難しい。そこで、(A.1)式をノード内で y 方向に積分することで、次式の x についての微分方程式を得る。

$$-D_{i,j,g} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_{x,i,j,g}(x) + \sum_{r,i,j,g} \varphi_{x,i,j,g}(x) = q_{x,i,j,g}(x) - L_{x,i,j,g}(x) \quad (\text{A.3})$$

ただし、

$$\varphi_{x,i,j,g}(x) \equiv \frac{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \phi_g(x, y) dy}{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} dy} = \frac{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \phi_g(x, y) dy}{\Delta y_j} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} q_{x,i,j,g}(x) &\equiv \frac{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} Q_g(x, y) dy}{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} dy} = \frac{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} Q_g(x, y) dy}{\Delta y_j} \\ &= \sum_{g' \neq g} \sum_{s,i,j,g' \rightarrow g} \varphi_{x,i,j,g'}(x) + \frac{\chi_{i,j,g}}{k_{eff}} \sum_{g'} v \sum_{f,i,j,g'} \varphi_{x,i,j,g'}(x) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$L_{x,i,j,g}(x) \equiv \frac{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left(-D_{i,j,g} \frac{d^2}{dy^2} \phi_g(x,y) \right) dy}{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} dy} = \frac{-D_{i,j,g} \frac{d\phi_g(x,y)}{dy} \Big|_{y=y_{j+1/2}} + D_{i,j,g} \frac{d\phi_g(x,y)}{dy} \Big|_{y=y_{j-1/2}}}{\Delta y_j} \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{J_{y,j+1/2,g}(x) - J_{y,j-1/2,g}(x)}{\Delta y_j}$$

であり、 $\phi_{x,i,j,g}$ と $q_{x,i,j,g}$ はそれぞれ中性子束と中性子源をノード内で y 方向に平均したものである。また、 $L_{x,i,j,g}$ はノード内の y 方向の中性子漏れ量を表しており、以降では横方向漏れと呼ぶ。同様に、 y についての微分方程式が得られる。

$$-D_{i,j,g} \frac{d^2}{dy^2} \phi_{y,i,j,g}(y) + \Sigma_{r,i,j,g} \phi_{y,i,j,g}(y) = q_{y,i,j,g}(y) - L_{y,i,j,g}(y) \quad (\text{A.7})$$

以降では x についての微分方程式(A.3)式にのみ着目するが、 y についての微分方程式(A.7)式でも同様に考えることができる。さて、(A.3)式を解析的に解くために、中性子源 $q_{x,i,j,g}$ と横方向漏れ $L_{x,i,j,g}$ を2次多項式で近似することを考える。なお、以降の議論では頻繁に座標の原点が変わるので、それに注意して読み進めて欲しい。

A.2.1.2 中性子源の展開

中性子源の展開について説明する。(A.5)式より中性子源 $q_{x,i,j,g}$ は中性子束 $\phi_{x,i,j,g}$ を用いて表されることがわかる。そのため、 $q_{x,i,j,g}$ を2次多項式で展開するために、まず $\phi_{x,i,j,g}$ を次式のようにノード(i, j)内で2次多項式で展開することを考える。

$$\phi_{x,i,j,g}(x) \approx \tilde{\phi}_{x,i,j,g}(x) = c_{x,i,j,g,0}^f + c_{x,i,j,g,1}^f x + c_{x,i,j,g,2}^f x^2 \quad (\text{A.8})$$

ただし、(A.8)式中の x はノード中心を原点としていることに注意して欲しい。今、 $\phi_{x,i,j,g}$ の関数形がわかっているとすると(後に述べるが、 $\phi_{x,i,j,g}$ は $\cosh + \sinh + 2$ 次多項式の形となる)。この $\phi_{x,i,j,g}$ の関数を用いて、次式を満たすように展開係数を決める。

$$\int_{-\Delta x_i/2}^{\Delta x_i/2} w_0(x) \phi_{x,i,j,g}(x) dx = \int_{-\Delta x_i/2}^{\Delta x_i/2} w_0(x) (c_{x,i,j,g,0}^f + c_{x,i,j,g,1}^f x + c_{x,i,j,g,2}^f x^2) dx \quad (\text{A.9})$$

$$\int_{-\Delta x_i/2}^{\Delta x_i/2} w_1(x) \phi_{x,i,j,g}(x) dx = \int_{-\Delta x_i/2}^{\Delta x_i/2} w_1(x) (c_{x,i,j,g,0}^f + c_{x,i,j,g,1}^f x + c_{x,i,j,g,2}^f x^2) dx \quad (\text{A.10})$$

$$\int_{-\Delta x_i/2}^{\Delta x_i/2} w_2(x) \phi_{x,i,j,g}(x) dx = \int_{-\Delta x_i/2}^{\Delta x_i/2} w_2(x) (c_{x,i,j,g,0}^f + c_{x,i,j,g,1}^f x + c_{x,i,j,g,2}^f x^2) dx \quad (\text{A.11})$$

$$w_0(x) = \frac{1}{\Delta x_i}, \quad w_1(x) = \frac{x}{\Delta x_i}, \quad w_2(x) = \left(\frac{x}{\Delta x_i} \right)^2 - \frac{1}{12} \quad (\text{A.12})$$

(A.9)-(A.11)式は重み付き残差法に基づいており、基とする関数と展開後の関数それぞれに重み関数 w をかけて積分した値が等しくなるという意味を持っている。特に(A.9)式は展開前と後で領域平均中性子束の値が等しいという意味を持っている。

このようにして得られた $\phi_{x,i,j,g}$ の多項式近似式と(A.5)式より、 $q_{x,i,j,g}$ の展開係数を次式で計算する。

$$q_{x,i,j,g}(x) \approx \tilde{q}_{x,i,j,g}(x) = c_{x,i,j,g,0}^q + c_{x,i,j,g,1}^q x + c_{x,i,j,g,2}^q x^2 \quad (\text{A.13})$$

$$c_{x,i,j,g,m}^q = \sum_{g' \neq g} \sum_{s,i,j,g' \rightarrow g} c_{x,i,j,g',m}^f + \frac{\chi_{i,j,g}}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'} v \Sigma_{f,i,j,g} c_{x,i,j,g',m}^f \quad (\text{A.14})$$

以上が中性子源の展開方法である。参考のため Figure A.2 に Mathematica での中性子束の展開係数の計算を示す。

```

(*展開係数の計算*)
flxAp[x_] := cf0 + cf1 * x + cf2 * x^2

w0[x_] := 1 / dlx
w1[x_] := x / dlx
w2[x_] := (x / dlx)^2 - 1 / 12

FullSimplify[Solve[{Integrate[w0[x] * flxAp[x], {x, -dlx / 2, dlx / 2}] = M0,
  Integrate[w1[x] * flxAp[x], {x, -dlx / 2, dlx / 2}] = M1,
  Integrate[w2[x] * flxAp[x], {x, -dlx / 2, dlx / 2}] = M2}, {cf0, cf1, cf2}]]

{{cf0 -> M0 - 15 M2 / dlx, cf1 -> 12 M1 / dlx^2, cf2 -> 180 M2 / dlx^3}}

In[64]=
(*モーメントの積分量の計算*)
(*座標系はノード中心を原点*)
flx[x_] := A * Cosh[k * x] + B * Sinh[k * x] + a0 + a1 * x + a2 * x^2

wd0[x_] := 1 / dlx
wd1[x_] := x / dlx
wd2[x_] := (x / dlx)^2 - 1 / 12

FullSimplify[Integrate[wd0[x] * flx[x], {x, -dlx / 2, dlx / 2}]]
FullSimplify[Integrate[wd1[x] * flx[x], {x, -dlx / 2, dlx / 2}]]
FullSimplify[Integrate[wd2[x] * flx[x], {x, -dlx / 2, dlx / 2}]]

Out[66]= a0 + a2 dlx^2 / 12 + 2 A Sinh[dlx k / 2] / dlx k
Out[69]= a1 dlx^2 / 12 + B (dlx k Cosh[dlx k / 2] - 2 Sinh[dlx k / 2]) / dlx k^2
Out[70]= a2 dlx^5 k^3 + 60 A (-6 dlx k Cosh[dlx k / 2] + (12 + dlx^2 k^2) Sinh[dlx k / 2]) / 180 dlx^2 k^3

```

Figure A.2 Mathematica での中性子束の展開係数の計算

A.2.1.3 横方向漏れの近似

横方向漏れ $L_{x,i,g}$ の近似について説明する。横方向漏れの展開方法には次の3つがある。

- **Quadratic transverse leakage (QTL)近似:** 隣接する3ノードのノード平均漏れ量を保存するように2次多項式で近似する。自作コードではQTL近似を用いている。
- **バックリング近似:** 中性子漏れが中性子束分布に比例する。
- **平坦近似:** 中性子漏れの空間分布を考慮しない。

ここでは、よく用いられるQTL近似について説明する。横方向漏れ $L_{x,i,j,g}$ を次式のようにノード (i,j) 内において2次多項式で近似することを考える。

$$L_{x,i,j,g}(x) \approx \tilde{L}_{x,i,j,g}(x) = c_{x,i,j,g,0}^L + c_{x,i,j,g,1}^L x + c_{x,i,j,g,2}^L x^2 \quad (\text{A.15})$$

ただし、(A.15)式中の x はノード中心を原点としていることに注意して欲しい。QTL 近似では、ノード (i, j) の横方向漏れ $L_{x,i,j,g}$ を 2 次多項式で近似するために Figure A.3 に示すように 3 つの隣接ノードに着目する。

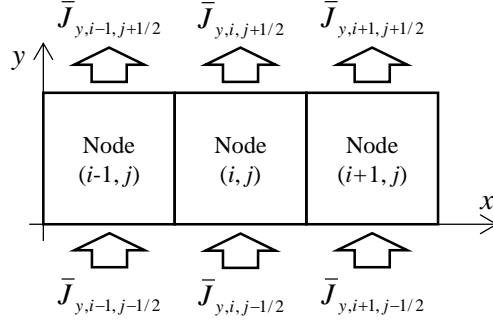


Figure A.3 3 隣接ノードと横方向漏れ

各ノードでの横方向漏れの平均値は次式で表される。

$$\begin{aligned} \bar{L}_{x,i,j,g} &\equiv \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} L_{x,i,j,g}(x) dx}{\Delta x_i} \\ &= \frac{\bar{J}_{y,i,j+1/2,g} - \bar{J}_{y,i,j-1/2,g}}{\Delta y_i} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\bar{J}_{y,i,j+1/2,g} \equiv \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} J_{y,i,j+1/2,g}(x) dx}{\Delta x_i} \quad (\text{A.17})$$

なお、ノード平均表面中性子流 $\bar{J}_{y,i,j+1/2,g}$ は次式に示すように $\varphi_{y,i,j,g}$ の微分値を用いて次式で計算できる。

$$\bar{J}_{y,i,j+1/2,g} = -D_{i,j,g} \left. \frac{d\varphi_{y,i,j,g}}{dy} \right|_{y=y_{j+1/2}} \quad (\text{A.18})$$

ここで、 $\tilde{L}_{x,i,j,g}$ の係数は、各ノードでの横方向漏れの平均値を保存するために次式を満たすように決められる。

$$\bar{L}_{x,i-1,j,g} = \frac{\int_{-\Delta x_i/2}^{-\Delta x_i/2 - \Delta x_{i-1}} \tilde{L}_{x,i,j,g}(x) dx}{\Delta x_{i-1}} = \frac{\int_{-\Delta x_i/2}^{-\Delta x_i/2 - \Delta x_{i-1}} (c_{x,i,j,g,0}^L + c_{x,i,j,g,1}^L x + c_{x,i,j,g,2}^L x^2) dx}{\Delta x_{i-1}} \quad (\text{A.19})$$

$$\bar{L}_{x,i,j,g} = \frac{\int_{-\Delta x_i/2}^{\Delta x_i/2} \tilde{L}_{x,i,j,g}(x) dx}{\Delta x_i} = \frac{\int_{-\Delta x_i/2}^{\Delta x_i/2} (c_{x,i,j,g,0}^L + c_{x,i,j,g,1}^L x + c_{x,i,j,g,2}^L x^2) dx}{\Delta x_i} \quad (\text{A.20})$$

$$\bar{L}_{x,i+1,j,g} = \frac{\int_{\Delta x_i/2}^{\Delta x_i/2 + \Delta x_{i+1}} \tilde{L}_{x,i,j,g}(x) dx}{\Delta x_{i+1}} = \frac{\int_{\Delta x_i/2}^{\Delta x_i/2 + \Delta x_{i+1}} (c_{x,i,j,g,0}^L + c_{x,i,j,g,1}^L x + c_{x,i,j,g,2}^L x^2) dx}{\Delta x_{i+1}} \quad (\text{A.21})$$

炉心外周部や境界面に接するノードなど、隣接する 3 ノードが存在しない場合には、次に挙げる方

法が用いられる。

- ・ 隣接 2 ノードのみで横方向漏れを算出する。この場合、横方向漏れは 1 次多項式で近似される。
- ・ 当該ノード内の中性子束分布と横方向漏れが比例すると仮定する。(バックリング近似)
- ・ 外側のノードにおける横方向漏れを零と仮定して QTL 近似を適用する。
- ・ 外部境界を完全反射境界条件と考えて、当該ノードと同じ横方向漏れのノードが外側に配置されていると仮定して QTL 近似を適用する。もしくは、外側のノードの横方向漏れにアルベド値を乗じるなどの工学的補正を使用する。自作コードでは完全反射境界条件のみ取り扱える仕様であるため、この方法を用いている。

以上が横方向漏れの近似方法である。参考のため Mathematica での QTL 近似の計算を Figure A.4 に示す。

```

In[73]:=
TL[x_] := c0 + c1 * x + c2 * x^2

FullSimplify[Solve[{Integrate[TL[x] / dlx0, {x, -dlx1 / 2 - dlx0, -dlx1 / 2}] = TL0,
Integrate[TL[x] / dlx1, {x, -dlx1 / 2, dlx1 / 2}] = TL1,
Integrate[TL[x] / dlx2, {x, dlx1 / 2, dlx1 / 2 + dlx2}] = TL2}, {c0, c1, c2}]]

Out[74]= {{c0 -> -(4 dlx0 dlx2 (dlx0 + dlx2) TL1 - 4 dlx1 (dlx0^2 + 3 dlx0 dlx2 + dlx2^2) TL1 +
dlx1^3 (TL0 - 6 TL1 + TL2) + dlx1^2 (dlx2 (TL0 - 9 TL1) + dlx0 (-9 TL1 + TL2))) /
(4 (dlx0 + dlx1) (dlx1 + dlx2) (dlx0 + dlx1 + dlx2)),
c1 -> (2 dlx2^2 (-TL0 + TL1) + dlx1^2 (-TL0 + TL2) + 2 dlx0^2 (-TL1 + TL2) +
3 dlx1 (dlx2 (-TL0 + TL1) + dlx0 (-TL1 + TL2))) /
((dlx0 + dlx1) (dlx1 + dlx2) (dlx0 + dlx1 + dlx2)),
c2 -> (3 (dlx2 (TL0 - TL1) + dlx1 (TL0 - 2 TL1 + TL2) + dlx0 (-TL1 + TL2))) /
(dlx0 + dlx1) (dlx1 + dlx2) (dlx0 + dlx1 + dlx2)}}}

```

Figure A.4 Mathematica での QTL 近似の計算

A.2.1.4 中性子束分布及び中性子流の計算

以上のように中性子源 $q_{x,i,j,g}$ と横方向漏れ $L_{x,i,j,g}$ を 2 次多項式で近似することで、(A.3)式は次式に示すように解析的に取り扱い易い形となる。

$$-D_{i,j,g} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_{x,i,j,g}(x) + \sum_{r,i,j,g} \varphi_{x,i,j,g}(x) = c_{x,i,j,0} + c_{x,i,j,1}x + c_{x,i,j,2}x^2 \quad (\text{A.22})$$

$$c_{x,i,j,m} = c_{x,i,j,m}^q - c_{x,i,j,m}^L \quad (\text{A.23})$$

A.2.1.2 の中性子源の展開で述べたように中性子源 $q_{x,i,j,g}$ の分布を計算するためには、中性子束分布を計算する必要がある。(A.22)式からどのようにして中性子束分布を計算するか説明する。有限差分タイプの場合、中性子束分布を計算するために Figure A.5 に示す 2 ノード問題を考える。

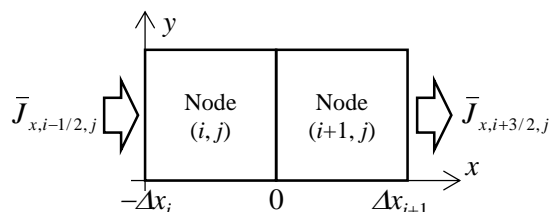


Figure A.5 2 ノード問題(2 ノードの隣接面が原点。 $\bar{J}_{x,i-1/2,j}$ と $\bar{J}_{x,i+3/2,j}$ が既知)

ノード(i, j)及び($i+1, j$)内での中性子束の微分方程式は次式で表される。

$$-D_{i,j,g} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_{x,i,j,g}(x) + \Sigma_{r,i,j,g} \varphi_{x,i,j,g}(x) = c'_{x,i,j,0} + c'_{x,i,j,1}x + c'_{x,i,j,2}x^2 \quad (\text{A.24})$$

$$-D_{i+1,j,g} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_{x,i+1,j,g}(x) + \Sigma_{r,i+1,j,g} \varphi_{x,i+1,j,g}(x) = c'_{x,i+1,j,0} + c'_{x,i+1,j,1}x + c'_{x,i+1,j,2}x^2 \quad (\text{A.25})$$

(A.24)及び(A.25)式中の x は 2 ノードの隣接面を原点としていることに注意して欲しい。また、多項式の係数 $c'_{x,i,j,m}$ は、ノード中心を原点とした時の係数 $c_{x,i,j,m}$ を 2 ノードの隣接面を原点に変換したものであることにも注意して欲しい。ここで、(A.24)及び(A.25)式の微分方程式の解析解は次式で表される。

$$\begin{aligned} \varphi_{x,I,j,g}(x) = & A_{x,I,j,g} \sinh(\kappa_{I,j,g} x) + B_{x,I,j,g} \cosh(\kappa_{I,j,g} x) \\ & + \frac{\Sigma_{r,I,j,g} c'_{x,I,j,0} + 2D_{I,j,g} c'_{x,I,j,2}}{(\Sigma_{r,I,j,g})^2} + \frac{c'_{x,I,j,1}}{\Sigma_{r,I,j,g}} x + \frac{c'_{x,I,j,2}}{\Sigma_{r,I,j,g}} x^2 \quad (I = i, i+1) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\kappa_{i,j,g} = \sqrt{\Sigma_{r,i,j,g} / D_{i,j,g}} \quad (\text{A.27})$$

(A.26)式より、4つの未定定数 $A_{x,i,j,g}$ 、 $B_{x,i,j,g}$ 、 $A_{x,i+1,j,g}$ 、 $B_{x,i+1,j,g}$ を求めることで、中性子束分布を求められることがわかる。

これらの未定定数は中性子束分布が次式を満たすとして決められる。

$$f_{i+1/2,j,g}^{s(i,j)} \varphi_{x,i,j,g}(0) = f_{i+1/2,j,g}^{s(i+1,j)} \varphi_{x,i+1,j,g}(0) \quad (\text{A.28})$$

$$-D_{i,j,g} \left. \frac{d\varphi_{x,i,j,g}}{dx} \right|_{x=0} = -D_{i+1,j,g} \left. \frac{d\varphi_{x,i+1,j,g}}{dx} \right|_{x=0} \quad (\text{A.29})$$

$$-D_{i,j,g} \left. \frac{d\varphi_{x,i,j,g}}{dx} \right|_{x=-\Delta x_i} = \bar{J}_{x,i-1/2,j} \quad (\text{A.30})$$

$$-D_{i+1,j,g} \left. \frac{d\varphi_{x,i+1,j,g}}{dx} \right|_{x=\Delta x_{i+1}} = \bar{J}_{x,i+3/2,j} \quad (\text{A.31})$$

ただし、 $f_{i+1/2,j}^{s(i,j)}$ はノード(i, j)の $i+1/2$ 表面の不連続因子(DF)である。(A.28)-(A.31)式はそれぞれ次の条件から導かれる。

- ノード表面での中性子束の連続性に関する条件。
- ノード表面で中性子流が連続であるという条件。
- $i-1/2$ 表面での中性子流が、既知であるとして与えた $\bar{J}_{x,i-1/2,j}$ に等しい。
- $i+3/2$ 表面での中性子流が、既知であるとして与えた $\bar{J}_{x,i+3/2,j}$ に等しい。

得られた中性子束分布の解析解からノード隣接表面の中性子流を計算する。なお、中性子束分布の解析解を多項式展開する際には座標系をノード中心に変換する必要があることに注意されたい。

外部境界に接しているノード($i+1/2$ 表面が外部境界面であり原点)においては、次の条件を与えた 1 ノード問題を考えることで未定定数を計算し、中性子束分布を求める。

$$-D_{i,j,g} \frac{d\varphi_{x,i,j,g}}{dx} \Big|_{x=-\Delta x_i} = \bar{J}_{x,i-1/2,j} \quad (\text{A.32})$$

$$-2(1+\alpha)D_{i,j,g} \frac{d\varphi_{x,i,j,g}}{dx} \Big|_{x=0} = (1-\alpha)\varphi_{x,i,j,g}(0) \quad (\text{A.33})$$

ただし、 α はアルベド値である。 $i-1/2$ 表面が外部境界面であり原点の場合においては次の条件を与える。

$$-D_{i,j,g} \frac{d\varphi_{x,i,j,g}}{dx} \Big|_{x=\Delta x_i} = \bar{J}_{x,i+1/2,j} \quad (\text{A.34})$$

$$2(1+\alpha)D_{i,j,g} \frac{d\varphi_{x,i,j,g}}{dx} \Big|_{x=0} = (1-\alpha)\varphi_{x,i,j,g}(0) \quad (\text{A.35})$$

得られた中性子束分布の解析解から外部境界の中性子流を計算する。

以上が中性子束分布及び中性子流の計算方法である。参考のため Mathematica での 2 ノード問題及び 1 ノード問題の計算を Figure A.6 及び Figure A.7 に示す。

```

In[75]= flx1[x_] := A1 * Cosh[k1 * x] + B1 * Sinh[k1 * x] + a10 + a11 * x + a12 * x^2
        flx2[x_] := A2 * Cosh[k2 * x] + B2 * Sinh[k2 * x] + a20 + a21 * x + a22 * x^2

        J1[x_] := -D1 * (k1 * A1 * Sinh[k1 * x] + k1 * B1 * Cosh[k1 * x] + a11 + 2 * a12 * x)
        J2[x_] := -D2 * (k2 * A2 * Sinh[k2 * x] + k2 * B2 * Cosh[k2 * x] + a21 + 2 * a22 * x)

        FullSimplify[Solve[{DF1 * flx1[0] == DF2 * flx2[0],
                            J1[0] == J2[0], J1[-L1] == JJ1, J2[L2] == JJ2}, {A1, B1, A2, B2}]]
Out[79]= {{A1 -> (DF2 (a11 D1 + JJ1 - 2 a12 D1 L1) Cosh[k2 L2] +
                  Cosh[k1 L1] (-DF2 (a21 D2 + JJ2 + 2 a22 D2 L2) +
                  (-a11 D1 + a21 D2) DF2 Cosh[k2 L2] + D2 (-a10 DF1 + a20 DF2) k2 Sinh[k2 L2])) /
                  (D1 DF2 k1 Cosh[k2 L2] Sinh[k1 L1] + D2 DF1 k2 Cosh[k1 L1] Sinh[k2 L2])),
          B1 -> -(D2 DF1 k2 (a11 D1 + JJ1 - 2 a12 D1 L1) Sech[k1 L1] Sinh[k2 L2] +
                  D1 k1 (DF2 (a21 D2 + JJ2 + 2 a22 D2 L2) + (a11 D1 - a21 D2) DF2 Cosh[k2 L2] +
                  D2 (a10 DF1 - a20 DF2) k2 Sinh[k2 L2]) Tanh[k1 L1]) /
                  (D1 k1 (D2 DF1 k2 Sinh[k2 L2] + D1 DF2 k1 Cosh[k2 L2] Tanh[k1 L1])),
          A2 -> (-DF1 Cosh[k1 L1] (a21 D2 + JJ2 + 2 a22 D2 L2 + (a11 D1 - a21 D2) Cosh[k2 L2]) +
                  Cosh[k2 L2]
                  (DF1 (a11 D1 + JJ1 - 2 a12 D1 L1) + D1 (a10 DF1 - a20 DF2) k1 Sinh[k1 L1])) /
                  (D1 DF2 k1 Cosh[k2 L2] Sinh[k1 L1] + D2 DF1 k2 Cosh[k1 L1] Sinh[k2 L2]),
          B2 -> -(D1 DF2 k1 (a21 D2 + JJ2 + 2 a22 D2 L2) Tanh[k1 L1] +
                  D2 k2 Sinh[k2 L2] (-a11 D1 DF1 + a21 D2 DF1 + DF1 (a11 D1 + JJ1 - 2 a12 D1 L1)
                  Sech[k1 L1] + D1 (a10 DF1 - a20 DF2) k1 Tanh[k1 L1])) /
                  (D2 k2 (D2 DF1 k2 Sinh[k2 L2] + D1 DF2 k1 Cosh[k2 L2] Tanh[k1 L1]))}}

```

Figure A.6 Mathematica での 2 ノード問題の計算

```

In[88]= (*ノード中心を原点*)

(*i+1/2表面が境界面*)
flx1[x_] := A1 * Cosh[k1 * x] + B1 * Sinh[k1 * x] + a10 + a11 * x + a12 * x^2
J1[x_] := -D1 * (k1 * A1 * Sinh[k1 * x] + k1 * B1 * Cosh[k1 * x] + a11 + 2 * a12 * x)

FullSimplify[
  Solve[{J1[-L1/2] == JJ1, 2 * (1 + a) * J1[L1/2] == (1 - a) * flx[L1/2]}, {A1, B1}]]
Out[88]= {{A1 ->  $\frac{1}{16 (1 + a) D1 k1}$ 
  Csch[ $\frac{k1 L1}{2}$ ] (4 (-1 + a) a0 + 8 (1 + a) JJ1 + 2 ((-1 + a) a1 - 8 (1 + a) a12 D1) L1 +
  (-1 + a) a2 L1^2 + 4 (-1 + a) A Cosh[ $\frac{k L1}{2}$ ] + 4 (-1 + a) B Sinh[ $\frac{k L1}{2}$ ]), B1 ->
  -  $\frac{1}{16 (1 + a) D1 k1}$  Sech[ $\frac{k1 L1}{2}$ ] ( -4 (-1 + a) a0 + 8 (1 + a) (2 a11 D1 + JJ1) - 2 (-1 + a)
  a1 L1 - (-1 + a) a2 L1^2 - 4 (-1 + a) A Cosh[ $\frac{k L1}{2}$ ] - 4 (-1 + a) B Sinh[ $\frac{k L1}{2}$ ]) }}

In[89]=
(*i-1/2表面が境界面*)
FullSimplify[
  Solve[{-2 * (1 + a) * J1[-L1/2] == (1 - a) * flx[-L1/2], J1[L1/2] == JJ2}, {A1, B1}]]
Out[89]= {{A1 -> -  $\frac{1}{16 (1 + a) D1 k1}$ 
  Csch[ $\frac{k1 L1}{2}$ ] ( -4 (-1 + a) a0 + 8 (1 + a) JJ2 + 2 ((-1 + a) a1 + 8 (1 + a) a12 D1) L1 -
  (-1 + a) a2 L1^2 - 4 (-1 + a) A Cosh[ $\frac{k L1}{2}$ ] + 4 (-1 + a) B Sinh[ $\frac{k L1}{2}$ ]),
  B1 -> -  $\frac{1}{16 (1 + a) D1 k1}$  Sech[ $\frac{k1 L1}{2}$ ] ( 4 (-1 + a) a0 + 8 (1 + a) (2 a11 D1 + JJ2) - 2 (-1 + a)
  a1 L1 + (-1 + a) a2 L1^2 + 4 (-1 + a) A Cosh[ $\frac{k L1}{2}$ ] - 4 (-1 + a) B Sinh[ $\frac{k L1}{2}$ ]) }}

```

Figure A.7 Mathematica での1ノード問題の計算

A.2.1.5 CMFD 計算

上記の中性子源の展開、横方向漏れの近似、中性子束分布及び中性子流の計算を繰り返すことで拡散方程式を数値的に解くことができる。しかし、その収束性は非常に悪い。そのため、ノード法では2ノード問題を解いた結果から得られる中性子流とノード平均中性子束を用いて Coarse Mesh Finite Difference (CMFD) 計算を行う。この CMFD 計算では1つのノードを1つのメッシュとして取り扱う。有限差分計算及び CMFD 計算の詳細については Ref. [A.4]や Ref. [A.5]を参考にして欲しい。

以下ではノード法における CMFD 計算について簡単に説明する。今、あるノード(i, j)と($i+1, j$)の2ノード問題が解き終わり、中性子束分布の解析解を得たとする。解析解から、次式を用いてノード平均中性子束とノード隣接表面での中性子流を計算する。

$$\bar{\phi}_{i,j,g} = \frac{\int_{-\Delta x_i}^0 \varphi_{x,i,j,g}(x) dx}{\Delta x_i}, \quad \bar{\phi}_{i+1,j,g} = \frac{\int_0^{\Delta x_{i+1}} \varphi_{x,i+1,j,g}(x) dx}{\Delta x_{i+1}} \quad (\text{A.36})$$

$$\bar{J}_{x,i+1/2,j} = -D_{i,j,g} \left. \frac{d\varphi_{x,i,j,g}}{dx} \right|_{x=0} = -D_{i+1,j,g} \left. \frac{d\varphi_{x,i+1,j,g}}{dx} \right|_{x=0} \quad (\text{A.37})$$

これらを用いて次式を満たすように補正係数 D^{cor} を計算する。

$$\begin{aligned}\bar{J}_{x,i+1/2,j} &= \bar{J}_{x,i+1/2,j}^{FD} + D_{i+1/2,j,g}^{cor} (\bar{\phi}_{i+1,j,g} + \bar{\phi}_{i,j,g}) \\ &= -D_{i+1/2,j,g}^{FD} (\bar{\phi}_{i+1,j,g} - \bar{\phi}_{i,j,g}) + D_{i+1/2,j,g}^{cor} (\bar{\phi}_{i+1,j,g} + \bar{\phi}_{i,j,g})\end{aligned}\quad (\text{A.38})$$

$$D_{i+1/2,j,g}^{FD} = \frac{2D_{i+1,j,g} D_{i,j,g}}{D_{i,j,g} \Delta x_{i+1} + D_{i+1,j,g} \Delta x_i}\quad (\text{A.39})$$

ここで、 $D_{i+1/2,j,g}^{cor}$ の計算には、ノード (i, j) と $(i+1, j)$ の 2 ノード問題の解析解から得られた $\bar{\phi}_{i,j,g}$ 、 $\bar{\phi}_{i+1,j,g}$ 及び $\bar{J}_{x,i+1/2,j}$ を用いることに注意して欲しい。例えば、ノード $(i+1, j)$ と $(i+2, j)$ の 2 ノード問題で得られた $\bar{\phi}_{i+1,j,g}$ を用いてはいけない。ノード (i, j) と $(i+1, j)$ の 2 ノード問題の解析解から得られた結果を用いることで、 $D_{i+1/2,j,g}^{cor}$ にノード (i, j) と $(i+1, j)$ の関係性をよく反映でき、収束性が良くなる。

外部境界に接しているノード ($i+1/2$ 表面が外部境界面) においては、1 ノード問題の解析解から得られた領域平均中性子束と中性子流を用いて、次式を満たすように外部境界面での D^{cor} を計算する。

$$\begin{aligned}\bar{J}_{x,i+1/2,j} &= \bar{J}_{x,i+1/2,j}^{FD} + D_{i+1/2,j,g}^{cor} \bar{\phi}_{i,j,g} \\ &= -D_{i+1/2,j,g}^{FD} \bar{\phi}_{i,j,g} + D_{i+1/2,j,g}^{cor} \bar{\phi}_{i,j,g}\end{aligned}\quad (\text{A.40})$$

$$D_{i+1/2,j,g}^{FD} = \frac{2(1-\alpha)D_{i,j,g}}{(1-\alpha)\Delta x_i + 4(1+\alpha)D_{i,j,g}}\quad (\text{A.41})$$

$i-1/2$ 表面が外部境界面の場合は次式を満たすように外部境界面での D^{cor} を計算する。

$$\begin{aligned}\bar{J}_{x,i-1/2,j} &= \bar{J}_{x,i-1/2,j}^{FD} + D_{i-1/2,j,g}^{cor} \bar{\phi}_{i,j,g} \\ &= -D_{i-1/2,j,g}^{FD} \bar{\phi}_{i,j,g} + D_{i-1/2,j,g}^{cor} \bar{\phi}_{i,j,g}\end{aligned}\quad (\text{A.42})$$

$$D_{i-1/2,j,g}^{FD} = -\frac{2(1-\alpha)D_{i,j,g}}{(1-\alpha)\Delta x_i + 4(1+\alpha)D_{i,j,g}}\quad (\text{A.43})$$

上記のようにすべてのノード表面に対する D^{cor} を計算し、1つのノードを1つのメッシュとして通常と同じ CMFD 計算を行う。CMFD 計算で中性子流、ノード平均中性子束及び増倍率を計算する。

A.2.2 計算手順

A.2.1 項では多項式解析的ノード法に基づく拡散計算の理論の説明を行った。本項では具体的な計算手順を示す。多項式解析的ノード法は計算手順に敏感であり、間違った手順で計算を行うと途端に計算が不安定になるのでよく注意して欲しい。

多項式解析的ノード法に基づく拡散計算のフローチャートを Figure A.8 に示す。拡散計算の有限差分法、CMFD 計算及び内部反復・外部反復の流れについては Ref. [A.4] や Ref. [A.5] を参考にして欲しい。

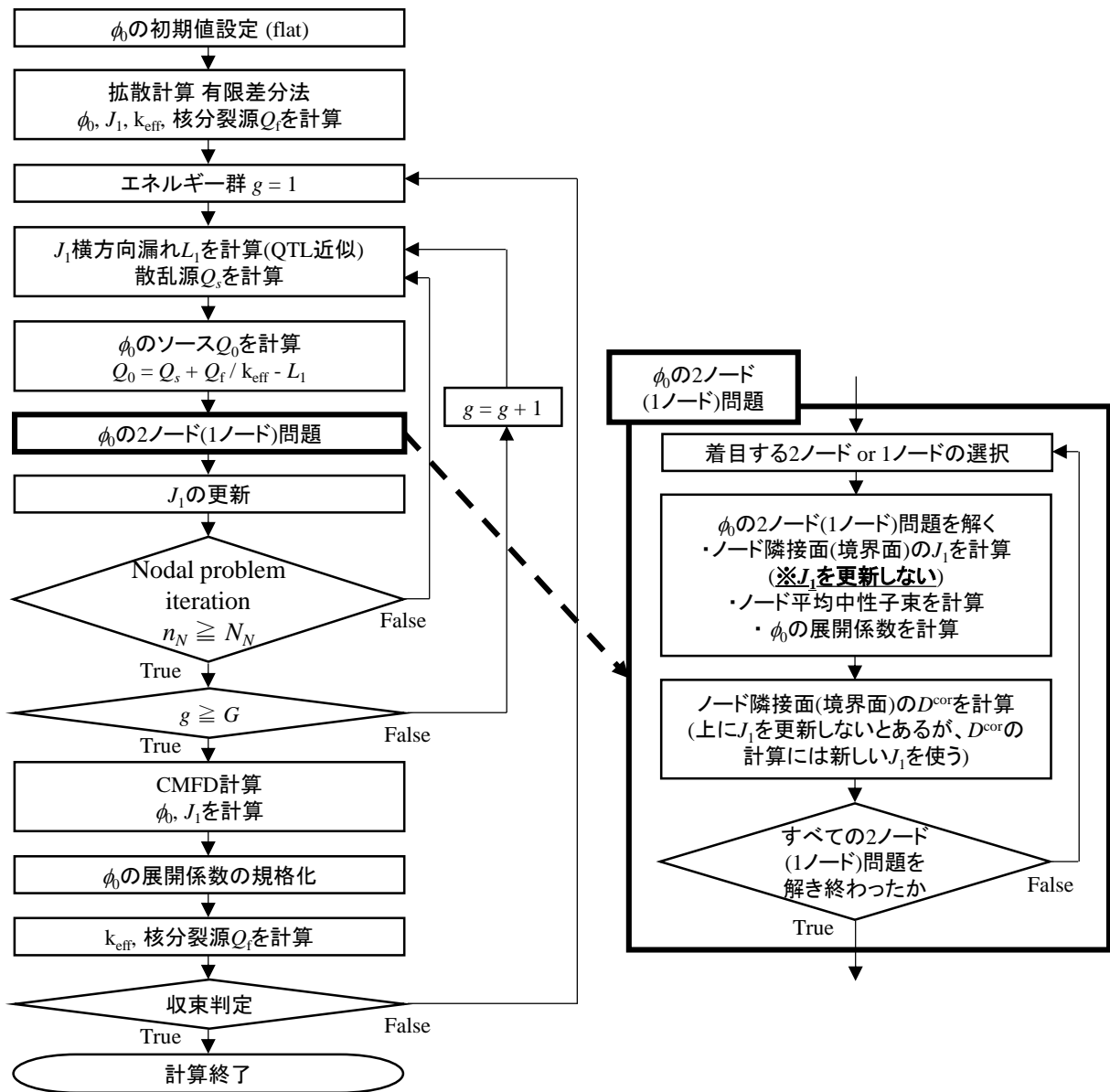


Figure A.8 多項式解析的ノード法に基づく拡散計算の計算手順

Figure A.8 の計算手順のうち、特に注意すべき点を以下に記す。

- (1) 中性子流 J_1 の更新のタイミングに注意する。ある 2 ノード(1 ノード)について 2 ノード(1 ノード)問題を解き中性子流を計算するが、中性子流を更新するのは全ての 2 ノード(1 ノード)問題が終わった後である。例えば、まずノード (i, j) と $(i+1, j)$ の 2 ノード問題を解き、 $\bar{J}_{x,i+1/2,j}^{new}$ を得たとする。その次にノード $(i+1, j)$ と $(i+2, j)$ の 2 ノード問題を解く際には、 $i+1/2$ 表面の中性子流として $\bar{J}_{x,i+1/2,j}^{new}$ を使ってはならない。ただし、 $D_{i+1/2,j,g}^{cor}$ の計算には $\bar{J}_{x,i+1/2,j}^{new}$ を用いる。イメージとしては、ガウスザイデル法でなくヤコビ法のように中性子流を更新する。中性子流を逐次更新すると計算が発散する。
- (2) CMFD 計算が終わった後、中性子束の展開係数を、ノード平均中性子束が CMFD 計算で得られたノード平均中性子束に等しくなるように規格化する。CMFD 計算で得られた中性子流を次の反復での中性子流として使う。
- (3) 横方向漏れ→2 ノード(1 ノード)問題の手順を繰り返すことを本論文中では Nodal iteration と呼ぶ。Nodal iteration を行うことで、横方向漏れの収束が速くなり、CMFD 計算の回数が少なくて済む。

しかし 2 ノード問題を解く回数が増えるので、Nodal iteration を行うことで必ずしも計算時間が短くなるとは限らない。

- (4) 座標変換を多用するので、変換し忘れ及び変換の際の式変形の間違いによく注意する必要がある。

A.3 多項式解析的ノード法に基づく SP3 計算

A.3.1 計算理論

A.3.1.1 導入

多項式解析的ノード法(2 次多項式展開)に基づく SP3 計算の理論を簡単に説明する。理論の多くは A.2 で説明した多項式解析的ノード法の拡散計算と同様であるため、特に異なる点以外は省略する。簡単のため Figure A.1 に示す 2 次元体系を考える。ノード(i, j)内の SP3 方程式は次式で表される。

$$-D_{1,i,j,g} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \Phi_g(x, y) + \sum_{r,i,j,g} \Phi_g(x, y) = Q_g(x, y) + 2\sum_{r,i,j,g} \phi_{2,g}(x, y) \quad (\text{A.44})$$

$$-\frac{3}{5} D_{3,i,j,g} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \phi_{2,g}(x, y) + \sum_{t,i,j,g} \phi_{2,g}(x, y) = \frac{2}{5} \left(\sum_{r,i,j,g} \phi_{0,g}(x, y) - Q_g(x, y) \right) \quad (\text{A.45})$$

$$\Phi_g(x, y) \equiv \phi_{0,g}(x, y) + 2\phi_{2,g}(x, y) \quad (\text{A.46})$$

$$Q_g(x, y) \equiv \sum_{g' \neq g} \sum_{s,i,j,g' \rightarrow g} \phi_{g'}(x, y) + \frac{\chi_{i,j,g}}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'} v \Sigma_{f,i,j,g'} \phi_{g'}(x, y) \quad (\text{A.47})$$

(A.44)式及び(A.45)式をノード内で y 方向に積分することで x についての微分方程式を得る。

$$-D_{1,i,j,g} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_{x,i,j,g}(x) + \sum_{r,i,j,g} \Psi_{x,j,g}(x) = \sum_{r,i,j,g} \varphi_{2,x,i,j,g}(x) + q_{x,i,j,g}(x) - L_{1,x,i,j,g}(x) \quad (\text{A.48})$$

$$-\frac{3}{5} D_{3,i,j,g} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_{2,x,i,j,g}(x) + \sum_{t,i,j,g} \varphi_{2,x,i,j,g}(x) = \frac{2}{5} \sum_{r,i,j,g} \varphi_{0,x,i,j,g}(x) - \frac{2}{5} q_{x,i,j,g}(x) - L_{3,x,i,j,g}(x) \quad (\text{A.49})$$

ただし、

$$\varphi_{0,x,i,j,g}(x) \equiv \frac{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \phi_{0,g}(x, y) dy}{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} dy} = \frac{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \phi_{0,g}(x, y) dy}{\Delta y_j} \quad (\text{A.50})$$

$$\varphi_{2,x,i,j,g}(x) \equiv \frac{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \phi_{2,g}(x, y) dy}{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} dy} = \frac{\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \phi_{2,g}(x, y) dy}{\Delta y_j} \quad (\text{A.51})$$

$$L_{1,x,i,j,g}(x) \equiv \frac{J_{1,y,j+1/2,g}(x) - J_{1,y,j-1/2,g}(x)}{\Delta y_j} \quad (\text{A.52})$$

$$L_{3,x,i,j,g}(x) \equiv \frac{3}{5} \frac{J_{3,y,j+1/2,g}(x) - J_{3,y,j-1/2,g}(x)}{\Delta y_j} \quad (\text{A.53})$$

である。

A.3.1.2 中性子源及び横方向漏れの2次多項式近似

SP3 計算においても、拡散計算とまったく同様に中性子源と J_1 及び J_3 の横方向漏れを2次多項式で近似する。これにより、(A.48)式及び(A.49)式は次式で表される。

$$\begin{aligned} -D_{1,i,j,g} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_{x,i,j,g}(x) + \sum_{r,i,j,g} \Psi_{x,j,g}(x) \\ = \sum_{r,i,j,g} \varphi_{2,x,i,j,g}(x) + c_{0,x,i,j,g,0} + c_{0,x,i,j,g,1}x + c_{0,x,i,j,g,2}x^2 \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{5} D_{3,i,j,g} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_{2,x,i,j,g}(x) + \sum_{t,i,j,g} \varphi_{2,x,i,j,g}(x) \\ = \frac{2}{5} \sum_{r,i,j,g} \varphi_{0,x,i,j,g}(x) + c_{2,x,i,j,g,0} + c_{2,x,i,j,g,1}x + c_{2,x,i,j,g,2}x^2 \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

A.3.1.3 中性子束分布の計算

(A.54)式及び(A.55)式は $\Psi_{x,i,j,g}$ と $\varphi_{2,x,i,j,g}$ の連立微分方程式となっている。2ノード問題を設定し、(A.54)式及び(A.55)式の連立微分方程式を厳密に解けば $\Psi_{x,i,j,g}$ と $\varphi_{2,x,i,j,g}$ の空間分布を計算することができる。しかし、この連立微分方程式を厳密に解く場合、解析解が非常に煩雑になってしまう。そこで、(A.54)式右辺の $\varphi_{2,x,i,j,g}$ 、(A.55)式右辺の $\varphi_{0,x,i,j,g} = \Psi_{x,i,j,g} - 2\varphi_{2,x,i,j,g}$ については2次多項式で近似することを考える。このとき、(A.54)式及び(A.55)式は次式で表される。

$$-D_{1,i,j,g} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_{x,i,j,g}(x) + \sum_{r,i,j,g} \Psi_{x,j,g}(x) = \tilde{c}_{0,x,i,j,g,0} + \tilde{c}_{0,x,i,j,g,1}x + \tilde{c}_{0,x,i,j,g,2}x^2 \quad (\text{A.56})$$

$$-\frac{3}{5} D_{3,i,j,g} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_{2,x,i,j,g}(x) + \sum_{t,i,j,g} \varphi_{2,x,i,j,g}(x) = \tilde{c}_{2,x,i,j,g,0} + \tilde{c}_{2,x,i,j,g,1}x + \tilde{c}_{2,x,i,j,g,2}x^2 \quad (\text{A.57})$$

(A.56)式及び(A.57)式は(A.22)式と同じ形をしており、拡散計算と同様に2ノード(1ノード)問題を解くことで $\Psi_{x,i,j,g}$ と $\varphi_{2,x,i,j,g}$ の空間分布を計算できることがわかる。

A.3.1.4 中性子束と中性子流に対するCMFD計算

中性子流 J_1 とノード平均中性子束 ϕ_0 に対するCMFD計算は拡散計算の場合とまったく同様である。まず、2ノード(1ノード)問題より得られた中性子流 J_1 とノード平均中性子束 ϕ_0 より D^{cor} を計算する。その後、拡散有限差分計算に基づくCMFD計算を行い、中性子流 J_1 とノード平均中性子束 ϕ_0 を計算する。

A.3.1.5 2次モーメントと3次モーメントに対するCMFD計算(Flux level fixed up Coarse mesh finite difference (FF-CMFD) method)

Appendix A.3.1.4 で説明した中性子束と中性子流に対するCMFD計算だけでは2次モーメント ϕ_2 及び3次モーメント J_3 の収束を速めることができない。 ϕ_2 及び J_3 の収束性の悪さは、計算全体の収束

性にかなりの悪影響を与える。収束性の悪さについては Appendix A.3.3 を参照されたい。 ϕ_2 及び J_3 の収束を加速させるために、 ϕ_2 及び J_3 に対しても中性子束と中性子流と同様の CMFD 法(以降では通常の CMFD 法と呼ぶ)を適用することが考えられる。しかし、詳しくは後述するが、数値的不安定性のため ϕ_2 及び J_3 に対して通常の CMFD 計算を適用することは困難である。Ref. [A.2]によれば、effective diffusion coefficient (EDC)に基づく CMFD 法(Ref. [A.3]の「解析的な結合係数の計算方法に基づく CMFD 法」もこれの一種)を用いることで、 ϕ_2 及び J_3 の収束を加速させることができる。しかし、この方法は煩雑である。そこで、本研究では ϕ_2 及び J_3 の収束を加速させるため、Flux level fixed up Coarse mesh finite difference (FF-CMFD)法を開発した。FF-CMFD 法は通常の CMFD 法とほぼ同様の計算手順であるため、既存の CMFD 法のコードを流用できる。

FF-CMFD 法について簡単に説明する。通常の CMFD 法では、補正項 D^{cor} を次式で計算する。

$$D^{cor} = \frac{J + D^{FD}(\phi_{i+1} - \phi_i)}{\phi_{i+1} + \phi_i} \quad (\text{A.58})$$

(A.58)式で D^{cor} を計算する場合、フラックス ϕ が正だけでなく負の値もとり得る場合に、(A.58)式の分母が 0 に近い値となり計算が不安定になってしまう可能性がある。中性子束と中性子流の方程式(拡散方程式)に通常の CMFD 法を適用する場合、(A.58)式のフラックス(中性子束)が負となり得ないため問題は発生しない。しかし、例えば SP3 方程式の 2 次モーメント及び 3 次モーメントに対する式に対して CMFD 法を適用することを考えると、フラックス(2 次モーメント)が負の値も取るため計算が不安定となってしまう。FF-CMFD 法ではフラックスが負の値を取らないように、フラックスレベルを底上げすることで上記の不安定性を回避する。

Flux level fixed up coarse mesh finite difference (FF-CMFD) method

FF-CMFD 法の理論を説明する。例として次式の SP3 方程式の 2 次モーメント及び 3 次モーメントに対する式に適用することを考える。ただし、簡単のためエネルギー群は 1 群、1 次元平板体で考える。

$$\frac{dJ'_3}{dx} + \Sigma_{t2}(x)\phi_2(x) = \frac{2}{5}(\Sigma_t(x)\phi_0(x) - Q(x)) = s_2(x) \quad (\text{A.59})$$

$$J'_3 \equiv \frac{3}{5}J_3 = -\frac{3}{5}D_3 \frac{d\phi_2}{dx} = -D'_3 \frac{d\phi_2}{dx} \quad (\text{A.60})$$

CMFD 計算を行う粗メッシュでこの方程式を積分することで離散化された次式を得る。

$$\frac{J'_{3,i+1/2} - J'_{3,i-1/2}}{\Delta x_i} + \Sigma_{t2,i}\phi_{2,i} = s_{2,i} \quad (\text{A.61})$$

ただし、添字 i は領域を示しており、添字 $i+1/2$ は領域 i と $i+1$ の間の表面を表している。有限差分近似を用いる場合、領域表面 J'_3 は次式で表される。

$$J'_{3,i+1/2} = -D'^{FD}_{3,i+1/2}(\phi_{2,i+1} - \phi_{2,i}) \quad (\text{A.62})$$

$$D'^{FD}_{3,i+1/2} = \frac{2}{\Delta x_{i+1}/D'_{3,i+1} + \Delta x_i/D'_{3,i}} \quad (\text{A.63})$$

(A.61)式を用いて通常の CMFD 計算を行う場合、補正係数 D^{cor} は次式で計算される。

$$D_{3,i+1/2}^{cor} = \frac{J_{3,i+1/2}^{target} + D_{3,i+1/2}'^{FD} (\phi_{2,i+1}^{target} - \phi_{2,i}^{target})}{\phi_{2,i+1}^{target} + \phi_{2,i}^{target}} \quad (\text{A.64})$$

ただし、添字 *target* は加速させたい計算(例えば詳細メッシュ計算)で得られた値であることを示している。しかし、 $\phi_{2,i}$ が負の値もとり得るため、(A.64)式の分母は 0 に近い値を取りうる。これにより、 D^{cor} の値が異常に大きくなる場合があり、CMFD 計算が不安定となる。このように(A.61)式を用いて通常の CMFD 計算を行うことは数値的安定性の観点から難しい。

FF-CMFD 法では ϕ_2 の代わりに、次式で定義される ϕ_2 の値を底上げした量 $\hat{\phi}_2$ について考える。

$$\hat{\phi}_2 = \phi_2 + C \quad (\text{A.65})$$

ただし、底上げ量 C は 0 より大きな値であり、空間に依存しない定数である。 $\hat{\phi}_2$ を用いて(A.61)式及び(A.62)式はそれぞれ次式で表される。

$$\frac{J'_{3,i+1/2} - J'_{3,i-1/2}}{\Delta x_i} + \sum_{t2,i} \hat{\phi}_{2,i} = s_{2,i} + \sum_{t2,i} C \quad (\text{A.66})$$

$$J'_{3,i+1/2} = -D_{3,i+1/2}'^{FD} (\hat{\phi}_{2,i+1} - \hat{\phi}_{2,i}) \quad (\text{A.67})$$

(A.61)式と(A.66)式が完全に等価であることに注意されたい。(A.66)式の右辺第一項が固定であると考えると、(A.66)式は拡散計算の固定中性子源問題とまったく同じ式形となるため、これと同じように解くことができる。

さて、(A.66)式を用いて通常の CMFD 計算を行うことを考える。補正係数 D^{cor} は次式で計算される。

$$\begin{aligned} D_{3,i+1/2}^{cor} &= \frac{J_{3,i+1/2}^{target} + D_{3,i+1/2}'^{FD} (\hat{\phi}_{2,i+1}^{target} - \hat{\phi}_{2,i}^{target})}{\hat{\phi}_{2,i+1}^{target} + \hat{\phi}_{2,i}^{target}} \\ &= \frac{J_{3,i+1/2}^{target} + D_{3,i+1/2}'^{FD} (\phi_{2,i+1}^{target} - \phi_{2,i}^{target})}{\phi_{2,i+1}^{target} + \phi_{2,i}^{target} + 2C} \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

(A.68)式より、適切な C を選べば D^{cor} の分母が必ず正の値をとり、計算が不安定とならないことがわかる。 D^{cor} が計算できれば、あとは通常の CMFD 法と同様に(A.66)式を解いて $\hat{\phi}_2$ を計算すれば良い。そして、この CMFD 計算で得られた $\phi_2 (= \hat{\phi}_2 - C)$ を加速させたい計算に反映することで、 ϕ_2 の収束を速めることができる。なお、SP3 ノード法では CMFD 計算で得られた J_3 も元の計算に反映する。

次に、底上げ量 C の計算方法について説明する。本研究で開発した多項式解析的 SP3 ノード法コードでは、 C を次式で計算している。

$$C = \text{Max} \left(\left| \phi_{2,i}^{target} \right| \right) + a \left| \text{Ave} \left(\phi_{0,i}^{target} \right) - \text{Max} \left(\left| \phi_{2,i}^{target} \right| \right) \right|, \quad a > 0 \quad (\text{A.69})$$

ただし、 $\text{Max}(v)$ は全メッシュの v の最大値、 $\text{Ave}(v)$ は全メッシュの v の平均値を表しており、 a は任意の 0 より大きな数である。(A.69)式で C を計算することで、 ϕ_2 がすべて 0 と等しい場合を含めて、まず(A.68)式の分母が 0 以下にならない。なお、Appendix A.3.3 で述べるが、 a の値が収束性に与える影響は無視できるほどであった。

以上が FF-CMFD 法の理論である。ここでは SP3 方程式を例としてあげたが、高次モードや一般化随伴中性子束の計算にも FF-CMFD 法を適用できる可能性がある。

A.3.2 計算手順

A.3.1 項では多項式解析的ノード法に基づく SP3 計算の理論の説明を行った。本項では具体的な計算手順を示す。なお、第 3 章の検証計算に用いている自作コードはここに示す手順に則っている。

多項式解析的ノード法に基づく SP3 計算のフローチャートを Figure A.9 に示す。

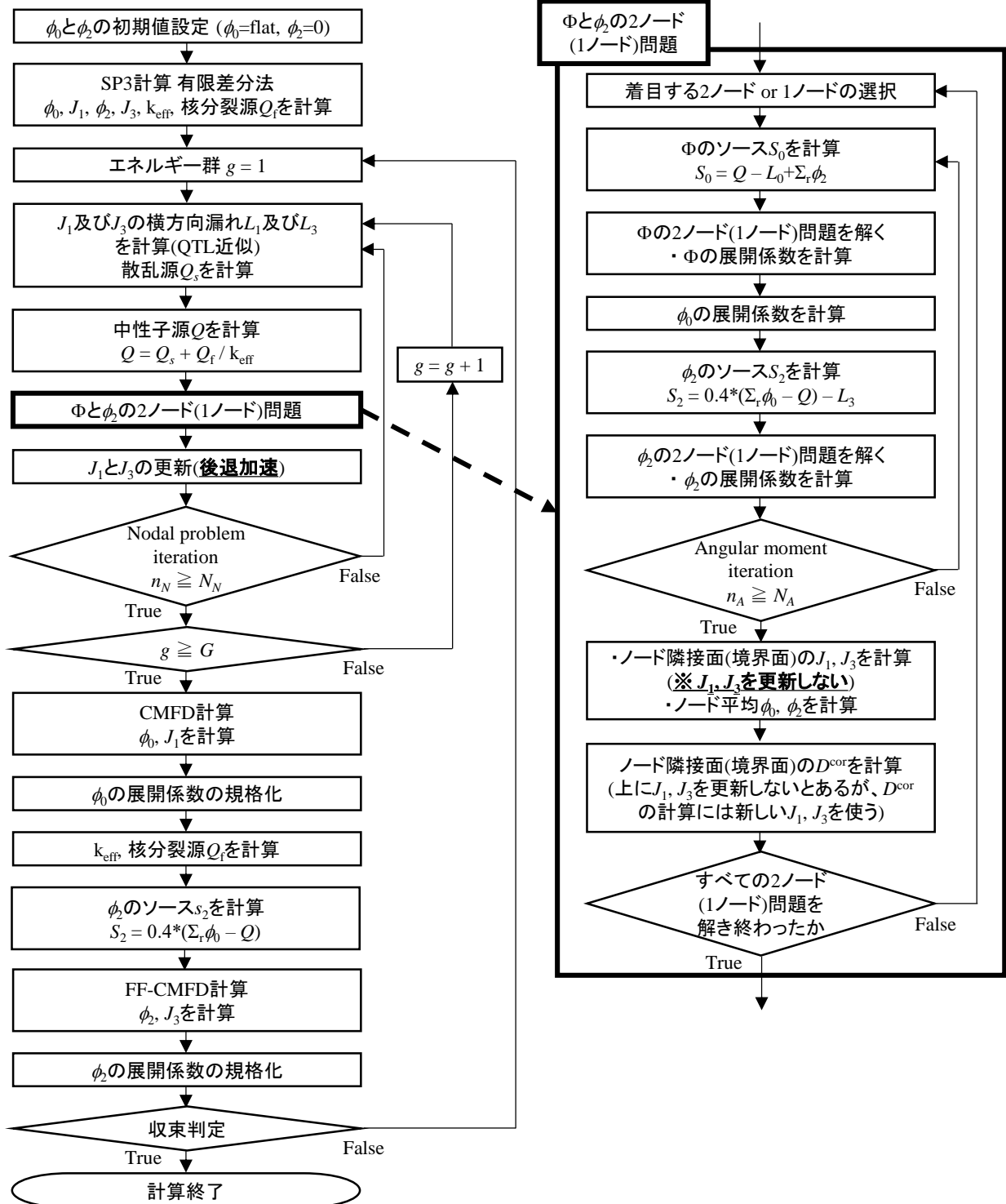


Figure A.9 多項式解析的ノード法に基づく SP3 計算の計算手順

Figure A.9 のうち特に注意すべき点を以下に記す。なお、A.2.2 の拡散計算の手順で述べた点は省略しているため、A.2.2 も参照して欲しい。

- (1) Nodal iteration を行う場合、 J_1 と J_3 を更新する際に後退加速を用いる。後退加速することで計算が安定になり収束が早くなる。なお、FF-CMFD で 2 次モーメント及び 3 次モーメントの加速を行わない場合は、Nodal iteration を行う行わないに関わらず、後退加速を用いなければ計算が発散してしまう。本論文第 3 章の検証計算で使った体系では FF-CMFD を用いない場合、後退加速因子は 0.5 程度であれば収束した。
- (2) Φ と ϕ_2 の 2 ノード(1 ノード)問題中で、 Φ の 2 ノード(1 ノード)問題 \rightarrow ϕ_2 の 2 ノード(1 ノード)問題を繰り返すことを本論文中では Angular moment iteration と呼ぶ。 Φ と ϕ_2 の連立微分方程式を厳密に解く代わりに、Angular moment iteration を行うことで Φ と ϕ_2 の関係性を収束させている。Angular moment iteration は計算の安定性及び収束性に関係する。FF-CMFD で ϕ_2 と J_3 の加速を行う場合は 2 回程度で十分であった。加速を行わない場合、4 回ほど行えば十分であった。
- (3) FF-CMFD で ϕ_2 と J_3 の加速を行うことで、計算の収束性だけでなく安定性もかなり向上する。

A.3.3 収束性についての検討

KAIST 3A ベンチマーク問題(第 3 章の検証に用いたのは 2A)を使って多項式解析的 SP3 ノード法の収束性について検討を行った[A.6]。計算には自作の多項式解析的 SP3 ノード法コードを用いた。KAIST 3A ベンチマーク問題は均質化された燃料ピンの断面積が与えられた pin-by-pin 計算のベンチマーク問題である。KAIST 3A ベンチマーク問題の集合体をに示す。

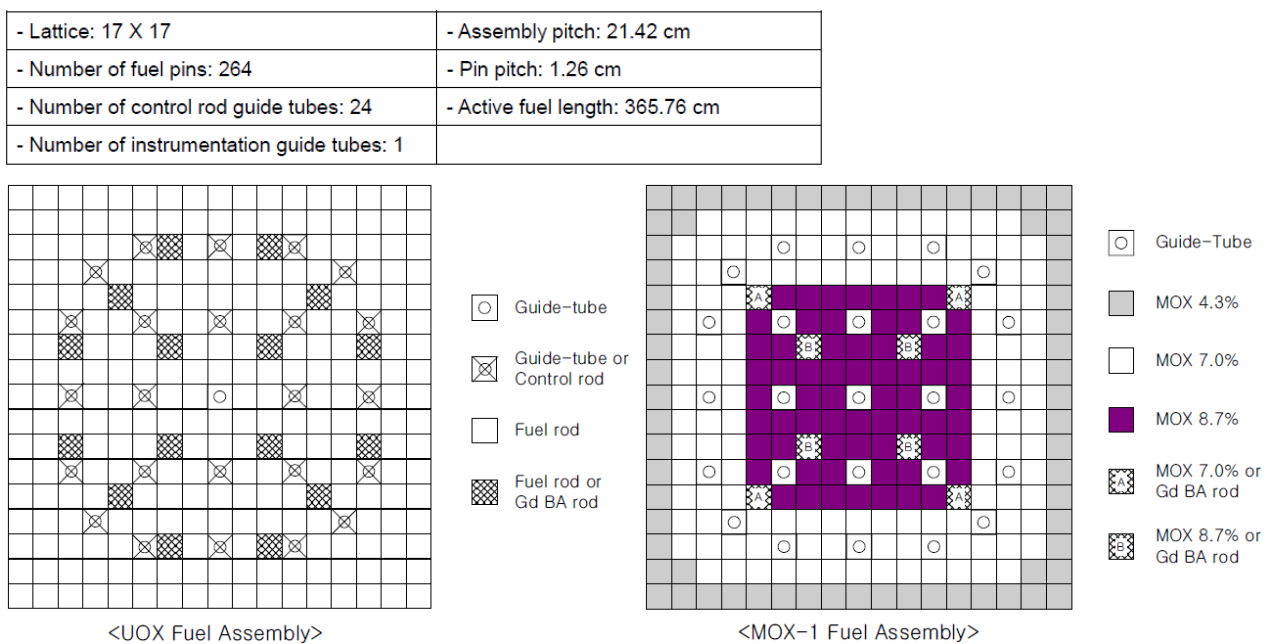


Figure A.10 KAIST 3A ベンチマーク問題の集合体

計算条件は以下の通りである。

- 7 群
- 固有値計算
- 収束判定条件 k_{eff} と中性子束どちらも $1.0e-8$

計算体系は次の 3 つの単一集合体体系であり、境界条件は完全反射境界条件とした。

- Case 1: UO2 3.3 w/o 燃焼集合体
- Case 2: UO2 3.3 w/o 燃焼集合体(制御棒+毒物入り)

- Case 3: MOX 燃料集合体(制御棒入り)
その他の留意点を以下に示す。
- Nodal problem iteration を NPI と略す。
- Angular moment iteration を AMI と略す。
- Relaxation factor of J (RFJ)は J_1 と J_3 の後退加速因子の値である。
- 以降で収束の目安として用いている Flux error は全中性子束の誤差ノルムであり、n 回目の外部反復の Flux error を次式で計算している。

$$Flux\ error = \frac{\sum_g \sum_i \sum_j \Delta x_i \Delta y_j (\phi_{0,g,i,j}^{(n)} - \phi_{0,g,i,j}^{(n-1)})^2}{\sum_g \sum_i \sum_j \Delta x_i \Delta y_j \phi_{0,g,i,j}^{(n)2}} \quad (A.70)$$

FF-CMFD 法と収束性

FF-CMFD 法と収束性の関係について検討する。拡散ノード法、SP3 ノード法(without FF-CMFD)、SP3 ノード法(with FF-CMFD)の収束の様子を Figure A.11-Figure A.13 に示す。ただし、NPI を 2 回、AMI を 2 回、RFJ=0.5 とした。Figure A.11-Figure A.13 より次のことがわかる。

- いずれの結果でも、FF-CMFD を用いない SP3 計算は反復の最初の方では拡散計算と同じように収束していつている。しかし、あるところまで反復が進み Flux error が小さくなると、途端に収束が緩やかになる。これは、Flux error に与える影響はそれほど大きくないが、収束の遅い誤差モードが存在することを意味している。反復の最初のあたりでは拡散計算と同様な収束であったことから、この誤差モードは ϕ_2 及び J_3 に起因するものであると考えられる。実際、Case 1 と比べて ϕ_2 及び J_3 の大きな Case 2 及び 3 の方がこの誤差モードが顕在化するの早い。
- いずれの結果でも、FF-CMFD を用いることで収束性がかなり向上していることがわかる。(i)の議論に加えて SP3 without FF-CMFD と SP3 with FF-CMFD の収束の様子の比較より、FF-CMFD は ϕ_2 及び J_3 に起因する誤差モードの収束を早めているといえる。この結果より、FF-CMFD を用いることで収束性が向上するが、 ϕ_2 及び J_3 の影響が小さい計算で収束条件が荒くても良い場合は FF-CMFD の効果が小さいと言える。

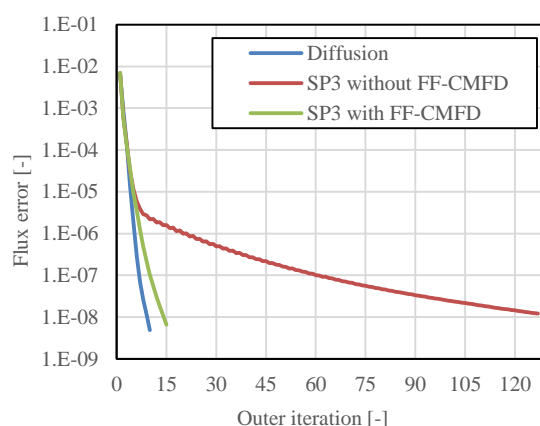


Figure A.11 FF-CMFD の有無による収束性の違い(Case 1: UO2 3.3 w/o 燃焼集合体)

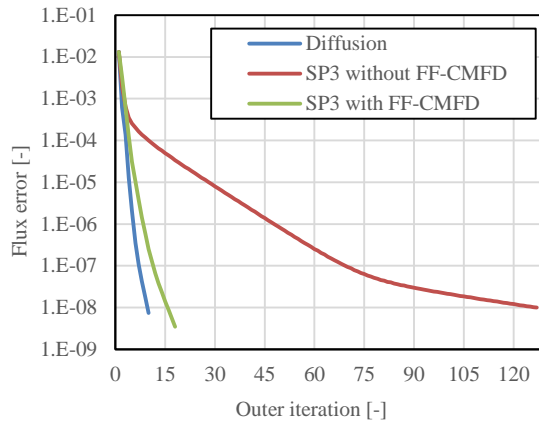


Figure A.12 FF-CMFDの有無による収束性の違い(Case 2: UO2 3.3 w/o 燃焼集合体(制御棒+毒物入り))

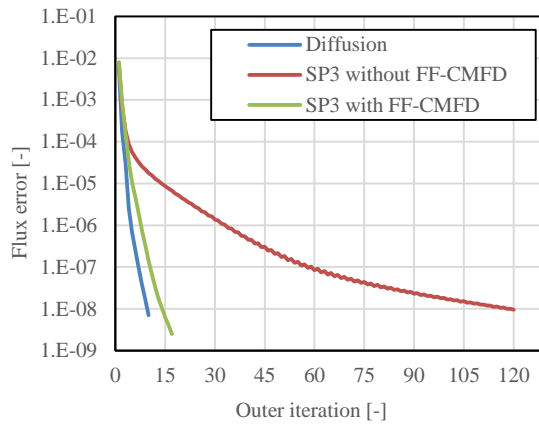


Figure A.13 FF-CMFDの有無による収束性の違い(Case 3: MOX 燃料集合体(制御棒入り))

次に、Case 1(NPI = 2, AMI = 2, RFJ = 0.7)で(A.69)式の a を 0, 0.1, 1.0, 100.0 と変えた結果を Figure A.14 に示す。Figure A.14 より、 a の値は収束性にほぼ影響を与えないことがわかる。つまり、底上げ量 C は収束性に影響がないといえる。なお、 $C = 0$ としたときは計算が発散してしまった。

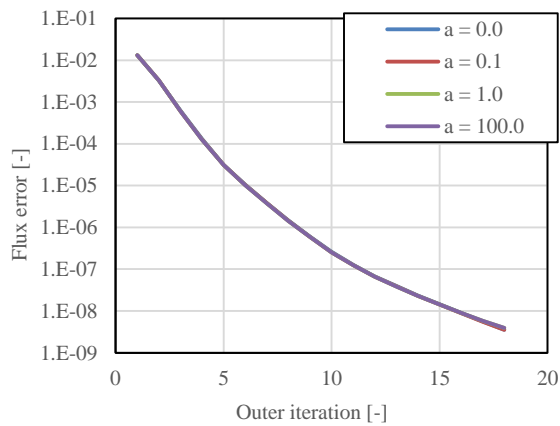


Figure A.14 FF-CMFDの係数 a と収束性(Case 2 (NPI = 2, AMI = 2, RFJ = 0.5))

Nodal problem iteration (NPI)と収束性

次に、Nodal problem iteration (NPI)と収束性の関係について検討する。Case 2 (AMI=2, RFJ=0.5, with FF-CMFD)で NPI を 1-4 と変化させた結果を Figure A.15 に示す。Figure A.15 より、NPI が 1 のとき、収束の様子が滑らかでなくなり、計算に不安定性が現れそうな兆しがある。また、NPI を多くすればするほど収束性があがるのがわかる。計算時間との兼ね合いからすると NPI = 2 で十分なようである。

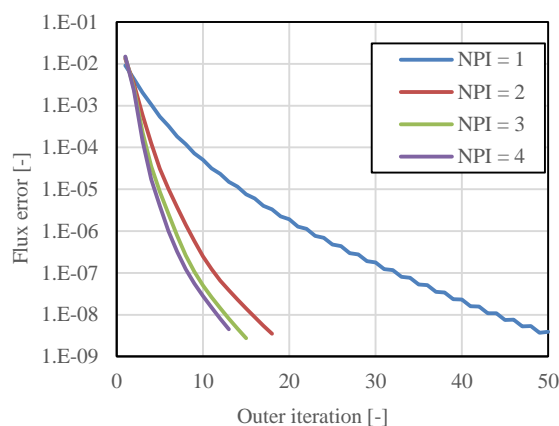


Figure A.15 NPI と収束性(Case 2 (AMI = 2, RFJ = 0.5, with FF-CMFD))

Angular moment iteration (AMI)と収束性

次に、Angular moment iteration (AMI)と収束性の関係について検討する。Case 2 (NPI = 1 or 2, RFJ = 0.5, with FF-CMFD)で AMI を 1-4 と変化させた結果を Figure A.16 及び Figure A.17 に示す。Figure A.16 及び Figure A.17 より次のことがわかる。

- (i) 途中までは AMI=1 の場合に収束性が一番良い。この理由はわかっていない。なお、ここでは示していないが、FF-CMFD を用いない場合は AMI を増やすほど収束性が良くなる。
- (ii) Figure A.16 で AMI = 1 の場合に収束しないのは、Figure A.15 でも見られる NPI = 1 のときに生じる計算の不安定性が原因であると考えられる。
- (iii) AMI を 2 以上にしても収束性にはほとんど影響がない。この結果より、角度モーメント間の関係の収束は早いと考えられる。

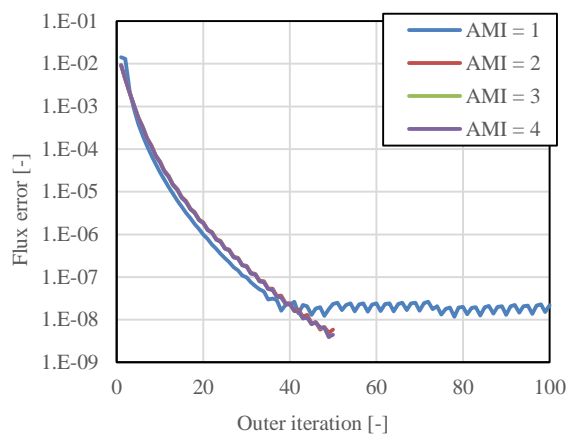


Figure A.16 AMI と収束性(Case 2 (NPI = 1, RFJ = 0.5, with FF-CMFD))

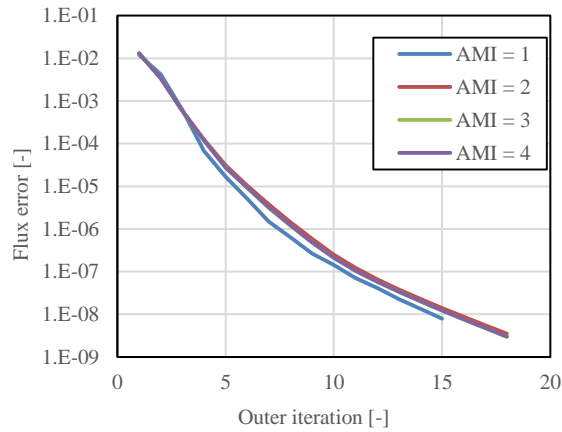


Figure A.17 AMI と収束性(Case 2 (NPI = 2, RFJ = 0.5, with FF-CMFD))

Relaxation factor of J (RFJ)と収束性

次に、Relaxation factor of J (RFJ)と収束性の関係について検討する。Case 2 (NPI = 2, AMI = 2, with FF-CMFD)で RFJ を 0.3, 0.5, 0.7, 1.0 と変化させたときの結果を Figure A.18 に示す。Figure A.18 より、RFJ = 1.0、つまり後退加速を用いない場合に計算が不安定となり収束が遅くなっていることがわかる。また、RFJ = 0.7 のときに収束が一番早く、最適な RFJ が存在することがわかる。

なお、FF-CMFD を用いており NPI = 1 の場合は RFJ の値は計算に影響を与えないことに注意されたい。

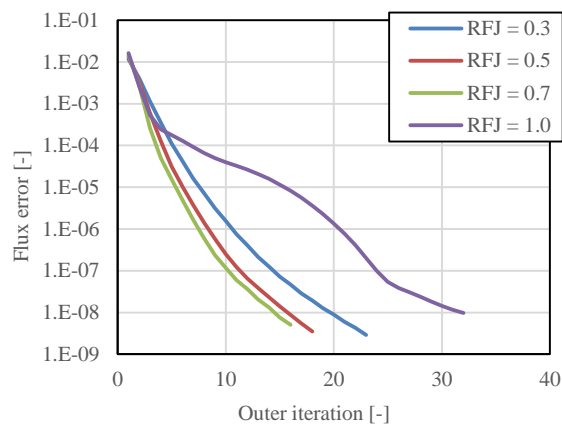


Figure A.18 RFJ と収束性(Case 2 (NPI = 2, AMI = 2, with FF-CMFD))

以上が多項式解析的 SP3 ノード法の収束性に関する検討である。この検討により得られた知見を以下に簡単にまとめる。

- (i) FF-CMFD を用いることで収束性が大幅に向上する。
- (ii) Nodal problem iteration、Angular moment iteration 及び Relaxation factor of J は収束性及び安定性に大きく影響するため適切な値を選ぶ必要がある。

A.4 参考文献

- A.1 K. S. SMITH, "Multi-Dimensional Nodal Transport Using the Simplified PL Method," *Proc. of Topical Conference On Reactor Physics and Safety*, **1**, 223, Saratoga, NY (1986).

- A.2 S. K. Hall, M. D. Eaton, M. P. Knight, “The implementation of a simplified spherical harmonics semi-analytic nodal method in PANTHER,” *Ann. Nucl. Energy*, 57, pp. 280-293 (2013).
- A.3 山本章夫, “近代ノード法”, 名古屋大学大学院講義資料 (2012).
- A.4 山本章夫, “拡散方程式の数値解法の基礎”, 第 36 回炉物理夏期セミナーテキスト, 日本原子力学会, pp.47-80 (2004).
- A.5 辻田浩介, “Characteristics 法を用いた動特性計算に関する研究”, 名古屋大学大学院工学研究科修士論文 (2013).
- A.5 N. Z. CHO, “Benchmark Problem in Reactor and Particle Transport Physics,” <http://nurapt.kaist.ac.kr/benchmark> (2000).

Appendix B セル表面部分中性子流及び部分中性子束の計算

本論文の第3章で、SP3方程式におけるDFを計算するためには、領域表面2次モーメント及び3次モーメントが必要であり、これらの計算に領域表面部分中性子流及び部分中性子束を用いると説明した。本Appendixでは、2次元MOCで領域表面部分中性子流及び部分中性子束を計算する方法を説明する。

Figure B.1に示す領域の4つの表面それぞれで領域表面2次モーメント及び3次モーメントを計算することを考える。

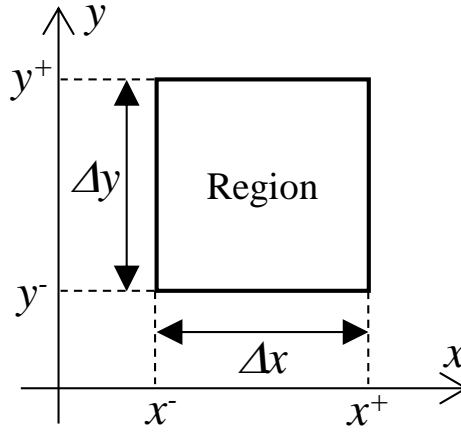


Figure B.1 着目する領域

求めたい領域表面2次モーメント及び3次モーメントはそれぞれ次式で定義される。

$$\phi_2^{s(x^\pm)} \equiv \frac{\int_{y^-}^{y^+} \phi_2(x^\pm, y) dy}{\Delta y}, \quad \phi_2^{s(y^\pm)} \equiv \frac{\int_{x^-}^{x^+} \phi_2(x, y^\pm) dx}{\Delta x} \quad (\text{B.1})$$

$$J_3^{s(x^\pm),x} \equiv \frac{\int_{y^-}^{y^+} J_3^x(x^\pm, y) dy}{\Delta y}, \quad J_3^{s(y^\pm),y} \equiv \frac{\int_{x^-}^{x^+} J_3^y(x, y^\pm) dx}{\Delta x} \quad (\text{B.2})$$

ただし、 s は領域表面平均の値であることを示している。

ここで、3章で示したように、2次モーメントは z 方向の部分中性子流を用いて(3.1.4.15)式で計算できる。

$$\phi_2 = -\frac{16}{5} \left(2J_1^{z+} - \frac{1}{2}\phi_0 \right) \quad (\text{再掲}) (3.1.4.15)$$

ただし、 z 方向の部分中性子流は次式で定義される。

$$J_1^{z+} \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \cos \theta \psi(\vec{\Omega}), \quad J_1^{z-} \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta d\theta \cos \theta \psi(\vec{\Omega}) \quad (\text{再掲}) (3.1.4.16)$$

また、 x 及び y 方向の3次モーメントはそれぞれ x 及び y 方向の部分中性子束を用いて(3.1.4.27)式及び(3.1.4.28)式で計算できる。

$$J_3^x = \frac{8}{7} \left(\phi_0^{x+} - \phi_0^{x-} - \frac{3}{2} J_1^x \right) \quad (\text{再掲}) (3.1.4.27)$$

$$J_3^y = \frac{8}{7} \left(\phi_0^{y+} - \phi_0^{y-} - \frac{3}{2} J_1^y \right) \quad (\text{再掲}) (3.1.4.28)$$

ただし、 x 及び y 方向の部分中性子束と中性子流はそれぞれ次式のように定義される。

$$\phi_0^{x+} \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \psi(\vec{\Omega}), \quad \phi_0^{x-} \equiv \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \psi(\vec{\Omega}) \quad (\text{再掲}) (3.1.4.29)$$

$$\phi_0^{y+} \equiv \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \psi(\vec{\Omega}), \quad \phi_0^{y-} \equiv \int_\pi^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \psi(\vec{\Omega}) \quad (\text{再掲}) (3.1.4.30)$$

$$J_1^x \equiv \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sin \theta \cos \varphi \psi(\vec{\Omega}), \quad J_1^y \equiv \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sin \theta \sin \varphi \psi(\vec{\Omega}) \quad (\text{再掲}) (3.1.4.31)$$

(B.1)式及び(B.2)式と(3.1.4.15)式、(3.1.4.27)式及び(3.1.4.28)式より領域表面 2 次モーメント及び 3 次モーメントは次式で表される。

$$\phi_2^{s(x^\pm)} = -\frac{16}{5} \left(2J_1^{s(x^\pm),z+} - \frac{1}{2} \phi_0^{s(x^\pm)} \right), \quad \phi_2^{s(y^\pm)} = -\frac{16}{5} \left(2J_1^{s(y^\pm),z+} - \frac{1}{2} \phi_0^{s(y^\pm)} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$J_3^{s(x^\pm),x} = \frac{8}{7} \left(\phi_0^{s(x^\pm),x+} - \phi_0^{s(x^\pm),x-} - \frac{3}{2} J_1^{s(x^\pm),x} \right), \quad J_3^{s(y^\pm),y} = \frac{8}{7} \left(\phi_0^{s(y^\pm),y+} - \phi_0^{s(y^\pm),y-} - \frac{3}{2} J_1^{s(y^\pm),y} \right) \quad (\text{B.4})$$

なお、領域表面中性子束と中性子流は、それぞれ部分中性子束と部分中性子流を用いて次式で計算される。

$$\phi_0^{s(x^\pm)} = \phi_0^{s(x^\pm),x+} + \phi_0^{s(x^\pm),x-}, \quad \phi_0^{s(y^\pm)} = \phi_0^{s(y^\pm),y+} + \phi_0^{s(y^\pm),y-} \quad (\text{B.5})$$

$$J_1^{s(x^\pm),x} = J_1^{s(x^\pm),x+} + J_1^{s(x^\pm),x-}, \quad J_1^{s(y^\pm),y} = J_1^{s(y^\pm),y+} + J_1^{s(y^\pm),y-} \quad (\text{B.6})$$

$$J_1^{x+} \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sin \theta \cos \varphi \psi(\vec{\Omega}), \quad J_1^{x-} \equiv \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sin \theta \cos \varphi \psi(\vec{\Omega}) \quad (\text{B.7})$$

$$J_1^{y+} \equiv \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sin \theta \sin \varphi \psi(\vec{\Omega}), \quad J_1^{y-} \equiv \int_\pi^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \sin \theta \sin \varphi \psi(\vec{\Omega}) \quad (\text{B.8})$$

(B.3)-(B.6)式より領域表面 2 次モーメント及び 3 次モーメントの計算には x,y,z 方向の部分中性子流、 x,y 方向の部分中性子束が必要であることがわかる。

2 次元 MOC でこれらの量を計算する方法について説明する。以下の議論での添字等の留意点を以下に示す。

- m 方向の角度中性子束の角度を (ω_m, θ_m) とする。なお、 ω_m は方位角で x 軸からなす角、 θ_m は極角で z 軸からなす角と定義する。 $\delta\Omega_m$ は m 方向の重みである。
- i は ray trace の番号である。 δA_i は ray trace 幅である。ここで、 i 番目の ray trace が x 表面及び y 表面を切り取る長さはそれぞれ $\delta A_{m,i}/\cos \omega_m$, $\delta A_{m,i}/\sin \omega_m$ である。
- 角度と x 表面に対する積分 $\int d\vec{\Omega} \int ds_x g(s_x, \vec{\Omega}) / \int ds$ は(B.9)式のように離散化される。 y 表面についても同様に(B.10)式のように離散化される。

$$\int d\vec{\Omega} \frac{\int ds_x g(s_x, \vec{\Omega})}{\int ds} = \sum_m \left(\frac{\delta\Omega_m \frac{\sum_i \frac{\delta A_{m,i}}{\cos \omega_m} g_{m,i}}{\sum_i \frac{\delta A_{m,i}}{\cos \omega_m}}}{\delta\Omega_m \frac{\sum_i \delta A_{m,i} g_{m,i}}{\sum_i \delta A_{m,i}}} \right) = \sum_m \left(\frac{\sum_i \delta A_{m,i} g_{m,i}}{\sum_i \delta A_{m,i}} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$= \sum_m \sum_i \frac{\delta\Omega_m g_{m,i} \delta A_{m,i}}{\Delta A_m}$$

$$\int d\vec{\Omega} \frac{\int ds_y g(s_y, \vec{\Omega})}{\int ds} = \sum_m \left(\frac{\delta\Omega_m \frac{\sum_i \frac{\delta A_{m,i}}{\sin \omega_m} g_{m,i}}{\sum_i \frac{\delta A_{m,i}}{\sin \omega_m}}}{\delta\Omega_m \frac{\sum_i \delta A_{m,i} g_{m,i}}{\sum_i \delta A_{m,i}}} \right) = \sum_m \sum_i \frac{\delta\Omega_m \delta A_{m,i} g_{m,i}}{\Delta A_m} \quad (\text{B.10})$$

部分中性子流

2次元 MOC で領域表面部分中性子流を計算する方法を以下に示す。

x 方向部分中性子流

$$J_1^{s,x+} = \sum_m \sum_i \frac{\delta\Omega_m \delta A_{m,i} \cos \omega_m \sin \theta_m \psi_{m,i}}{\Delta A_m} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \omega_m \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta_m \leq \pi \right) \quad (\text{B.11})$$

$$J_1^{s,x-} = \sum_m \sum_i \frac{\delta\Omega_m \delta A_{m,i} \cos \omega_m \sin \theta_m \psi_{m,i}}{\Delta A_m} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \omega_m \leq \frac{3\pi}{2}, 0 \leq \theta_m \leq \pi \right) \quad (\text{B.12})$$

y 方向部分中性子流

$$J_1^{s,y+} = \sum_m \sum_i \frac{\delta\Omega_m \delta A_{m,i} \sin \omega_m \sin \theta_m \psi_{m,i}}{\Delta A_m} \quad (0 \leq \omega_m \leq \pi, 0 \leq \theta_m \leq \pi) \quad (\text{B.13})$$

$$J_1^{s,y-} = \sum_m \sum_i \frac{\delta\Omega_m \delta A_{m,i} \sin \omega_m \sin \theta_m \psi_{m,i}}{\Delta A_m} \quad (\pi \leq \omega_m \leq 2\pi, 0 \leq \theta_m \leq \pi) \quad (\text{B.14})$$

z 方向部分中性子流

$$J_1^{s,z+} = \sum_m \sum_i \frac{\delta\Omega_m \delta A_{m,i} \cos \theta_m \psi_{m,i}}{\Delta A_m} \quad \left(0 \leq \omega_m \leq 2\pi, 0 \leq \theta_m \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$J_1^{s,z-} = \sum_m \sum_i \frac{\delta\Omega_m \delta A_{m,i} \cos \theta_m \psi_{m,i}}{\Delta A_m} \quad \left(\pi \leq \omega_m \leq 2\pi, \frac{\pi}{2} \leq \theta_m \leq \pi \right) \quad (\text{B.16})$$

ただし、 $\psi_{m,i}$ は領域表面での角度中性子束を表している。

部分中性子束

2次元 MOC で領域表面部分中性子束を計算する方法を以下に示す。

x 方向部分中性子束

$$\phi_0^{s,x+} = \sum_m \sum_i \frac{\delta\Omega_m \delta A_{m,i} \psi_{m,i}}{\Delta A_m} \left(-\frac{\pi}{2} \leq \omega_m \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta_m \leq \pi \right) \quad (\text{B.17})$$

$$\phi_0^{s,x-} = \sum_m \sum_i \frac{\delta\Omega_m \delta A_{m,i} \psi_{m,i}}{\Delta A_m} \left(\frac{\pi}{2} \leq \omega_m \leq \frac{3\pi}{2}, 0 \leq \theta_m \leq \pi \right) \quad (\text{B.18})$$

y 方向部分中性子束

$$\phi_0^{s,y+} = \sum_m \sum_i \frac{\delta\Omega_m \delta A_{m,i} \psi_{m,i}}{\Delta A_m} \quad (0 \leq \omega_m \leq \pi, 0 \leq \theta_m \leq \pi) \quad (\text{B.19})$$

$$\phi_0^{s,y-} = \sum_m \sum_i \frac{\delta\Omega_m \delta A_{m,i} \psi_{m,i}}{\Delta A_m} \quad (\pi \leq \omega_m \leq 2\pi, 0 \leq \theta_m \leq \pi) \quad (\text{B.20})$$

以上が領域表面部分中性子流及び部分中性子束の計算方法である。

z 方向部分中性子流の計算について得ている知見を以下に記しておく。

- $\cos \theta_m$ を含むため、極角分点に Gauss-Legendre 分点や TY-opt を用いても他の量(全中性子束、中性子流)と比べて収束が遅い。

Appendix C EPDF と角度モーメントに対する DF の関係

本 Appendix では EPDF と角度モーメントに対する DF の関係についてのメモを記す。今、ある非均質体系を均質化して EPDF を次式に示すように計算したとする。

$$f^e(\vec{\Omega}) \equiv \frac{\phi^{het,e}(\vec{\Omega})}{\phi^{hom,e}(\vec{\Omega})} \quad (C.1)$$

この均質体系において even-parity 角度中性子束は EPDF の分だけ不連続となる。ここで、この均質体系において偶数次角度モーメント ϕ_{2N}^m ($-2N \leq m \leq 2N$) も不連続となるはずであり、次式に示すように角度モーメントに対する DF を定義できる。

$$f_{2N}^m \equiv \frac{\phi_{2N}^{het,m}}{\phi_{2N}^{hom,m}} \quad (C.2)$$

EPDF と角度モーメントに対する DF の関係について考える。(C.1)式を変形することで次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{4\pi} R_{2N}^m(\vec{\Omega}) f^e(\vec{\Omega}) \phi^{hom,e}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} &= \int_{4\pi} R_{2N}^m(\vec{\Omega}) \phi^{het,e}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \\ &= \phi_{2N}^{het,m} \end{aligned} \quad (C.3)$$

ただし、 R は実球面調和関数である。(C.2)式及び(C.3)式より、次式が成り立つことがわかる。

$$f_{2N}^m = \frac{\int_{4\pi} R_{2N}^m(\vec{\Omega}) f^e(\vec{\Omega}) \phi^{hom,e}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega}}{\int_{4\pi} R_{2N}^m(\vec{\Omega}) \phi^{hom,e}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega}} \quad (C.4)$$

(C.4)式より、 f_{2N}^m は $R_{2N}^m(\vec{\Omega}) \phi^{hom,e}(\vec{\Omega})$ を重みとして EPDF $f^e(\vec{\Omega})$ を全立体角で平均した量であり、単純に $f^e(\vec{\Omega})$ に $R_{2N}^m(\vec{\Omega})$ をかけて全立体角で積分すれば得られるような量ではないことがわかる。

一番簡単なケースとして、全中性子束の DF f_0^0 について考える。このとき(C.4)式は次式で表される。

$$f_0^0 = \frac{\int_{4\pi} R_0^0(\vec{\Omega}) f^e(\vec{\Omega}) \phi^{hom,e}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega}}{\int_{4\pi} R_0^0(\vec{\Omega}) \phi^{hom,e}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega}} = \frac{\int_{4\pi} f^e(\vec{\Omega}) \phi^{hom,e}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega}}{\phi_0^{hom,0}} \quad (C.5)$$

ここで、EPDF を実球面調和関数で展開する。

$$f^e(\vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \left(R_0^0(\vec{\Omega}) F_0^0 + 5 \sum_{m=-2}^2 R_2^m(\vec{\Omega}) F_2^m + \dots \right) \quad (C.6)$$

(C.6)式を(C.5)式に代入して変形することで次式を得る。

$$\begin{aligned} f_0^0 &= \frac{\frac{1}{4\pi} F_0^0 \phi_0^{hom,0} + \frac{1}{4\pi} \left(5 \sum_{m=-2}^2 F_2^m \phi_0^{hom,2} + \dots \right)}{\phi_0^{hom,0}} \\ &= \frac{1}{4\pi} F_0^0 + \frac{1}{4\pi} \left(5 \sum_{m=-2}^2 F_2^m \frac{\phi_0^{hom,2}}{\phi_0^{hom,0}} + \dots \right) \end{aligned} \quad (C.7)$$

一般的に高次モーメントは全中性子束 ϕ_0^0 より小さい値をとることを考慮すると、(C.7)式の第 2 項以降はあまり効いてこないと予想できる。よって、全中性子束の DF f_0^0 と EPDF の角度平均値 $F_0^0/4\pi$ は

ほぼ同じような値をとると考えられる。

以上の結果より、角度モーメントに対する DF f_{2N}^m は $R_{2N}^m(\bar{\Omega})\phi^{hom,e}(\bar{\Omega})$ を重みとして EPDF $f^e(\bar{\Omega})$ を全立体角で平均した量であり、全中性子束の DF の値は EPDF の角度平均値と強い関連を持っていることがわかった。

公刊論文リスト

1. 坂本達哉, 遠藤知弘, 山本章夫, “輸送方程式における不連続因子に関する検討”, 日本原子力学会 2013 年 春の年会, 近畿大学東大阪キャンパス, 3 月 26-28 日, 2013.
2. T. Sakamoto, T. Endo and A. Yamamoto, “Study on Discontinuity Factor for Angular Flux in Transport Equation,” *Trans. Am. Nucl. Soc.*, 108, pp. 887-890 (2013).
3. 坂本達哉, 遠藤知弘, 山本章夫, “輸送方程式における不連続因子の比較”, 日本原子力学会 2013 年 秋の年会, 八戸工業大学, 9 月 3-5 日, 2013.